Un operador en ℓ_1

ALFONSO GUTIÉRREZ RAMÍREZ

I.S.B.N.: 978-84-692-4190-5
Nº Depósito Legal: SE-3964-2009
Edita: Sector de Enseñanza de CSI-F en Sevilla
C/ San Juan Bosco, 51 B
41008-SEVILLA
Telf.:954069012

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Un operador en ℓ_1

Autor: Alfonso Gutiérrez Ramírez

ÍNDICE

Introducción i

Sección 1: Preliminares 1
Sección 2: Definiciones de algunos operadores en $\mathbf{F}$ 12
Sección 3: Lemas preliminares 13
Sección 4: Estimación de $\|T\|$ 15
Sección 5: Comportamiento de ciertas potencias de T 24
Sección 6: Los operadores $\tau_{nm} \circ Q_m^{\circ}$ 30
Sección 7: Algunas propiedades del compacto K_{nm} 35
Sección 8: Algunas propiedades de los operadores $T^{c_n^k}$ 37
Sección 9: El lema principal 50
Sección 10: Prueba del resultado final 58

Referencias 61

INTRODUCCIÓN

El más famoso problema en Teoría de Operadores es el *problema del subespacio invariante*: *¿Todo operador lineal acotado posee un subespacio (cerrado y no trivial) invariante?* En el siglo pasado se han realizado muchos trabajos para dar respuesta, en sentido positivo, a este problema, que es tratar de probar que todo operador posee un subespacio invariante no trivial. Un subspacio $\mathcal{A}$ se dice invariante por T si $T\mathcal{A}$ está contenido en $\mathcal{A}$. Este problema estaba motivado por la descomposición de matrices y por el deseo de entender la estructura y geometría de un operador arbitrario.

Claramente existen subespacios invariantes si el operador está definido sobre un espacio de dimensión finita sobre los complejos. El Teorema de Descomposición Canónica de Jordan da respuesta afirmativa a la tarea de encontrar tales subespacios. Sea T un operador sobre un espacio de dimensión finita, y denotemos también por T la matriz asociada al operador T. Entonces $p(T) = \det(T-\lambda I)$ es un polinomio de grado d y así $p(T)$ posee d raices no necesariamente distintas. Si λ es una de ellas, $\det(T-\lambda I) = 0$, que significa que $T-\lambda I$ es no invertible. Puesto que el espacio es finito-dimensional, esto es equivalente a que $T-\lambda I$ no es inyectivo. En consecuencia, existe un vector x, $x \neq 0$ tal que $(T-\lambda I)x = 0$ y, por tanto, $\mathcal{F} = \{\alpha x : \ \alpha \in \mathbb{C}\}$ es un subespacio invariante para el operador T. Sin embargo para espacios de dimensión infinita la tarea de determinar los subespacios invariantes de un operador no es fácil: si S es el operador desplazamiento a la derecha unilateral tal que $Se_n = e_{n+1}$, resulta que el espectro puntual, $\sigma_p(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Ker}(T-\lambda) \neq \{0\}\}$, es vacío. Un ejemplo de operador definido en un espacio de dimensión infinita sin subespacios invariantes lo damos a continuación. Si $\mathcal{P}$ denota el espacio vectorial de todos los polinomios con coeficientes complejos con producto interior

$$(p, q) = \int_0^1 p(x)\overline{q(x)}dx,$$

y tomamos el operador multiplicación M_x tal que $M_x(p(x)) = xp(x)$ para todo p en $\mathcal{P}$, entonces $\mathcal{P}$ es una variedad lineal densa en $\mathfrak{L}^2(0,1)$. Si $\mathcal{A}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{P}$ invariante por M_x, y si existe $p \in \mathcal{A}$, con $p \neq 0$, entonces se puede probar qur $\mathcal{A} = \mathcal{P}$. Existen muchos ejemplos como el anterior,(p.e., el operador de Volterra o el de Donogue) y que pueden encontrarse en [RR].

Obsérvese que, para ver que un operador T tiene subespacios invariantes lo primero que hay que probar es que existen un operador T y un punto x del espacio, para el que la órbita bajo T, esto es, el conjunto de imágenes de x de las sucesivas iteradas de T:

$$\mathrm{Orb}(T, x) = \{x, \ Tx, \ T^2x, \dots\},$$

no es densa en el espacio. En realidad, si toda órbita es densa, entonces no existen subconjuntos invariantes.

Este problema se puede replantear en el contexto de operadores cíclicos: si T es un operador lineal acotado actuando sobre un espacio de Banach separable infinito dimensional $\mathcal{B}$, decimos que un vector x de $\mathcal{B}$ es *cíclico* para T si, el espacio lineal cerrado generado por el conjunto $\mathrm{Orb}(T,x)$ coincide con $\mathcal{B}$. Un operador se dice cíclico si posee un vector cíclico. La importancia de tales vectores radica en que el espacio lineal cerrado generado por la órbita de un vector es el subespacio cerrado más pequeño, invariante bajo un operador, que contiene al vector. Así que un operador no posee subespacios invariantes cerrados no triviales si y sólo si todo vector no nulo es cíclico. De manera análoga podemos definir dos propiedades más fuertes para un vector x del espacio, relacionados con la invarianza o estabilidad de subespacios para un operador T. Se dice que x es un vector *supercíclico* si el conjunto de múltiplos escalares de $\mathrm{Orb}(T,x)$ es denso en $\mathcal{B}$, e *hipercíclico* si $\mathrm{Orb}(T,x)$ es densa en $\mathcal{B}$. Un operador se dice hipercíclico (supercíclico) si posee un vector hipercíclico (supercíclico). De forma similar, un operador no posee subconjuntos invariantes cerrados no triviales si y sólo si todo vector no nulo del espacio es hipercíclico, con lo que quedaria resuelto el *problema del subconjunto invariante*.

Resulta sencillo ver que para un operador T y un número complejo λ, se tiene que para todo natural n el nucleo $\mathrm{Ker}(T-\lambda I)^n$ es un subespacio invariante para el operador T. Introducimos ahora un concepto más fuerte que el de subespacio invariante para un operador T: el de *subespacio ultra-invariante*; que es un subespacio invariante para todo operador que conmuta con T. Obsérvese que en el caso anterior, $\mathrm{Ker}(T-\lambda I)^n$ es también un subespacio ultra-invariante para T. Sabemos que el espectro de un operador compacto T es o un conjunto finito de números complejos, o una sucesión de números complejos tendiendo a cero (el punto 0 siempre está en $\sigma(T)$). Luego si λ es un elemento de $\sigma(T)$ no nulo, entonces $\mathrm{Ker}(T-\lambda I)^n$ es un subespacio no trivial y, por lo anterior, ultra-invariante. Si T es un operador lineal, acotado y $\sigma(T)=\{0\}$, entonces T se dice que es *quasi-nilpotente*.

El cálculo analítico funcional de Riesz se usa en el estudio de álgebras de Banach y resulta especialmente útil en el estudio de operadores lineales definidos en espacios de Banach. De él podemos extraer algunos resultados interesantes. Primeramente, consideramos un operador lineal acotado T y un subconjunto Δ cerrado y abierto relativo al espectro $\sigma(T)$. Entonces definimos el operador idempotente

$$E(\Delta;T)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (z-T)^{-1}dz,$$

donde Γ es un curva rectificable de Jordan que contiene geométricamente sólo a Δ. Óbservese que si λ_0 es un punto aislado de $\sigma(T)$, entonces $E(\lambda_0;T)$ es un idempotente no trivial. También, λ_0 es una singularidad aislada de la función analítica $z\to(z-T)^{-1}$ en $\mathbb{C}\backslash\sigma(T)$. Además, si f es una función analítica, con valores complejos, definida y analítica en un entorno que contiene a $\sigma(T)$, se tiene que

$$f(T)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(z-T)^{-1}dz,$$

donde Γ en una curva rectificable de Jordan que contiene geométricamente a $\sigma(T)$, conmuta con todo operador que conmute con T.

Sabemos que si $\sigma_p(T)$ es no vacío, T posee vectores propios, y por tanto subespacios invariantes. Por otra parte, si el espectro derecho (o residual), $\sigma_r(T)=\{\lambda\subset\mathbb{C};\ T-\lambda I$ es no invertible a derecha}, es no vacío, entonces el conjunto $\overline{\mathrm{Im}(T-\lambda)}$ es no trivial e invariante por T. Luego en la búsqueda de subespacios invariantes para un operador, podemos suponer que $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)\setminus \sigma_p(T)$. Más aun, uno puede suponer que cualquier sucesión de vectores asociados a un λ de $\sigma_{ap}(T)$ converge débilmente a cero. En definitiva, si el espectro $\sigma(T)$ no es conexo, el cálculo analítico funcional permite encontrar subespacios invariantes para el operador. De hecho, si $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, donde σ_1, σ_2 sonconjuntos cerrados, entonces T posee subespacios ultra-invariantes F_1 y F_2 de modo que $\sigma_1 = \sigma(T_{|F_1})$ y $\sigma_2 = \sigma(T_{|F_2})$. Luego los casos que ofrecen dificultad en la obtención de subespacios invariantes, son aquellos en los que el espectro del operador es conexo.

De modo que el problema del subespacio invariante para el caso en que un operador T es compacto y quasi-nilpotente queda aun abierto. Este problema es resuelto finalmente en espacios de Banach, de modo afirmativo, por N. S. Aronszajn y K. T. Smith [AS]. Posteriormente, V. I. Lomonosov [Lo] da una generalización del resultado de Aronszajn y Smith: Si T es un operador lineal compacto no nulo en un espacio de Banach, entonces existe un subespacio no trivial que es invariante bajo cualquier operador que conmute con T. Como corolario de esta generalización obtiene que, si un operador acotado T en un espacio de Banach es tal que existe una cadena de tres operadores conmutando consecutivamente, de T a un operador compacto K, esto es, si existe un operador S (no múltiplo de la identidad) tal que T conmuta con S y S conmuta con K, entonces T posee un subespacio invariante.

A mediados de los setenta Per Enflo [En1] perfila una construcción de un operador sin subespacios invariantes no triviales en un espacio de Banach no reflexivo. Este ejemplo no estaba totalmente terminado pues, algunos de los cálculos en la parte difícil de la construcción no estaban adecuadamente escritos y todavía debían ser completamente verificados. A pesar de ello, Enflo anunció su resultado en 1975. Ya al principio de los años ochenta circulaban versiones de un *preprint* sobre este contraejemplo. El artículo de Enflo [En2] fue enviado a *Acta Mathematica* en Febrero de 1981. El artículo aun no estaba bien escrito, y era complicado y nada fácil de entender, así que finalmente y, después de sucesivas revisiones, en 1985 fue aceptado y publicado en 1987. En éste artículo, Enflo construye el primer contraejemplo de un operador contínuo en un espacio de Banach sin subespacios invariantes cerrados no triviales, así que la respuesta al problema del subspacio invariante para espacios de Banach queda resuelta de modo negativo. Más tarde (pero publicado con anterioridad al artículo de Enflo [En2]), C. J. Read en sucesivos trabajos construye clases de operadores sin subespacios invariantes. En [Re1] presenta su ejemplo original de un operador (en realidad, una clase de operadores) en un espacio de Banach sin subespacios invariantes. En ese trabajo, Read construye una norma apropiada (tal norma es la más pequeña y única posible) que depende de una sucesión estrictamente creciente sobre un espacio de Banach de dimensión infinita, y en el que todo vector no nulo del espacio es cíclico para el operador desplazamiento derecha.

En 1985, Read publica un artículo [Re2] probando que su ejemplo original puede ser ligeramente modificado para dar un operador acotado sin subespacios invariantes cerrados no triviales en ℓ^1. Esto lo consigue restringiéndose a la bola unidad de cierto subespacio del espacio de Banach construido en su primer ejemplo. En [Re3] presenta una versión simplificada de este último artículo. Posteriormente, también A.M. Davie da una simplificación del ejemplo de Read para el problema del subespacio invariante y que comunica a B. Beauzamy [Be5].

Por otra parte, en el contexto de espacios de Hilbert, el problema del subespacio invariante no está resuelto. Más aun, el problema del subespacio invariante sólo ha sido resuelto para espacios no reflexivos.

Mencionar también que A. Atzmon [At], construye un ejemplo de un operador en un espacio de Fréchet nuclear sin subespacios invariantes. Éste depende de algunas propiedades de espacios de funciones analíticas y resulta bastante interesante por sí mismo.

El estudio de la hiperciclicidad se origina en los trabajos de Birkhoff, 1929 [Bi] y MacLane, 1952 [Mc] en los que, respectivamente, prueban que los operadores de traslación y derivación, actuando sobre el espacio de funciones enteras, son hipercíclicos. El primer ejemplo de un operador hipercíclico actuando en un espacio de Banach fue dado por Rolewicz en 1969 [Ro]. El ejemplo dado es el operador desplazamiento a la izquierda unilateral perturbado por una constante mayor que uno en los espacios de sucesiones ℓ^p o c_0. En ese mismo trabajo prueba que no existen operadores hipercíclicos definidos sobre un espacio de dimensión finita y, plantea la pregunta de si todo espacio de Banach separable infinito-dimensional admite un operador hipercíclico. Esta pregunta fue resuelta afirmativamente por Ansari [An].

En 1991 D. A. Herrero [He] y en 1993 P. S. Bourdon [Bo] independientemente prueban que cualquier operador hipercíclico en un espacio de Hilbert, posee una variedad lineal densa consistiendo, excepto por cero, de vectores hipercíclicos. Este problema tuvo su origen en los trabajos de Beauzamy [Be1; Be2; Be3] en los que construye operadores en espacios de Hilbert con una variedad lineal consistiendo, excepto por cero, de vectores hipercíclicos. Por otro lado, el mismo autor [Be4], da una prueba simplificada del ejemplo construido por P. Enflo [En2], construyendo un operador en los que todos sus vectores gozan de una propiedad más débil que la hiperciclicidad, la superciclicidad [Be4]. En estos trabajos, Beauzamy usa las profundas ideas introducidas por Enflo [En2]. El concepto de superciclicidad fue introducido por H. M. Hilden y L. J. Wallen en 1973 [HiW] probando que el operador desplazamiento a la izquierda unilateral con peso en el espacio de sucesiones ℓ^2 es supercíclico. También existen trabajos que complementan estas ideas. Un trabajo de Alfonso Montes [Mo] proporciona condiciones suficientes para que un operador lineal y contínuo, definido sobre un espacio de Banach, posea un subespacio cerrado infinito-dimensional que conste, excepto por cero, de vectores hipercíclicos. En contraste con los resultados de Herrero y Bourdon, no todos los operadores acotados hipercíclicos en un espacio de Banach poseen un subespacio cerrado infinito-dimensional consistiendo, excepto por cero, de vectores hipercíclicos (ver Teorema 3.4 en [Mo]).

Por otro lado, existe una condición suficiente para que un operador acotado T sobre un espacio de Banach $\mathcal{B}$ posea vectores hipercíclicos. Esta condición se conoce como *Criterio de Hiperciclicidad*:

Decimos que T satisface el *Criterio de Hiperciclicidad* si existen subconjuntos densos X_0, Y_0 de X, una sucesión (n_k) de números naturales, y aplicaciones $S_{n_k} : Y_0 \to X$ (no necesariamente contínuas) tales que

(i) $T^{n_k} \to 0$ puntualmente en X_0
(ii) $S_{n_k} \to 0$ puntualmente en Y_0
(iii) $T^{n_k} S_{n_k} \to Id_{Y_0}$,

donde Id_{Y_0} es la identidad restringida a Y_0.

Así, si un operador T satisface el criterio de hiperciclicidad entonces T es hipercíclico [GS]. El primer resultado de este tipo es descubierto por Carol Kitai [Ki] en su disertación de Toronto de 1982 que nunca fue publicada. Este resultado es redescubierto por Gethner y Shapiro [GS] con una prueba más simple, y que usan para unificar las pruebas de los resultados de Birkhoff [Bi], MacLane [Mc], Rolewicz [Ro], Seidel y Walsh [SW], y muchos otros. Este criterio de hiperciclicidad es utilizado para descubrir el comportamiento hipercíclico en posteriores trabajos sobre este tema [BS1; BS2; GS; CS; He; HW; Sh]. Cabe preguntarse si este criterio lo cumplen todos los operadores hipercíclicos aparecidos en la literatura. H. Salas [Sa1] construye un operador desplazamiento bilátero que no satisface el Criterio de Hiperciclicidad cuando la sucesión de los enteros positivos $\{n_k\}$ del criterio, es la sucesión de los números naturales. También Salas [Sa2], prueba que un operador desplazamiento a la izquierda con pesos $\{w_j\}$ es hipercíclico si y sólo si $\limsup_n \prod_{j=1}^{\infty} w_j = \infty$.

En 1988, C. J. Read [Re4] construye un operador (en realidad una clase de operadores) en el espacio de las sucesiones ℓ^1 para el que todo vector no nulo es hipercíclico. De modo que el problema del subconjunto invariante para espacios de Banach queda resuelta de modo negativo. De nuevo, en el contexto de espacios de Hilbert, este problema aun permanece abierto.

Otros resultados recientes sobre hiperciclicidad han sido obtenidos por P. S. Bourdon y N. Feldman [BF], en los que prueban que si la órbita de un vector bajo un operador lineal acotado T es densa en algún conjunto abierto, entonces el operador es hipercíclico. También, un resultado de Feldman [Fe] afirma que si existe un vector x tal que $\mathrm{Orb}\{T, x\}$ se encuentra a una distancia acotada de cualquier vector del espacio, entonces el operador T es hipercíclico, aunque el vector x no necesariamente tiene que ser hipercíclico para T.

En este trabajo clarificamos las ideas expuestas en el artículo de C. J. Read de 1988 [Re4], en el que da respuesta negativa al problema del subconjunto invariante para espacios de Banach, y tratamos de complementar dicho trabajo con una exposición más detallada y amplia que en el trabajo original. Aportamos algunos ejemplos que nos permiten justificar y entender algunas definiciones y lemas. Los resultados y pruebas del trabajo de Read son desarrollados aqu con algo ms de detalle, aclarando ciertos pasos de algunas pruebas y justificando explicitamente otros. El lema final de la sección 10 de este trabajo es aportacin del autor.

Probaremos que existe un operador (en realidad una clases de operadores) en el espacio de sucesiones ℓ^1 para el que todo vector no nulo del espacio es hipercíclico. La construcción de tal clase de operadores descansa en los métodos usados en los artículos de Read [Re1; Re2; Re3], en los que resuelve el problema del subspacio invariante en un espacio de Banach arbitrario y en ℓ^1. Para obtener la hiperciclicidad de todo vector no nulo de ℓ^1 respecto de un operador lineal acotado T, es necesario añadir nuevas técnicas en relación con los polinomios del operador T y ciertas potencias del mismo operador.

En las primeras secciones de este trabajo (secciones 1-3), damos algunas definiciones y resultados sencillos, de las que destacamos la definición de *sucesión creciendo suficientemente rápido* (Definición 1.2) que tendrá gran importancia a lo largo de todo este trabajo, y el Lema 1.15 que establece un isomorfismo algebraico entre dos bases muy especiales; una de ellas es la base canónica $\{e_i\}_{i\geq 0}$ de ℓ^1 y la otra, $\{w_i\}_{i\geq 0}$, se comporta 'bien' para un operador lineal y contínuo T de modo que $Tw_i = w_{i+1}$. En la sección 4 probamos que el operador lineal T, que es un desplazamiento a la derecha unilateral con respecto a la base $\{w_i\}$, está acotado en el espacio vectorial generado por $\{e_i : i \geq 0\}$, y con la norma usual de ℓ^1 cuando tomamos sucesiones creciendo suficientemente rápido. En la sección 5 mostramos que la sucesión de ciertos operadores T^{n_k}, que son justamente los que 'enlazan bien' con polinomios del operador T (ver Lema 1.15), son acotados en una sucesión de subespacios encajados de ℓ^1, es decir, dado cualquier vector x no nulo de ℓ^1 existe un natural n_k suficientemente grande para el que la cola (con respecto a la base canónica de ℓ^1) del vector x, a partir de ese natural n_k, está acotada por el operador T^{n_k}. En la sección 6 se define un compacto $K(n_k)$, que depende fundamentalmente de las sucesiones *creciendo suficientemente rápido*, y se prueba que dado cualquier elemento x de ℓ^1 (no nulo), existe un número natural suficientemente grande para el que una proyección dada de tal vector x siempre está en algún compacto $K(n_k)$. Esta propiedad nos permite llegar a la ciclicidad de todo vector no nulo de ℓ^1 en la sección 7. Las secciones 8 y 9 resultan fundamentales para la obtención del resultado final de este trabajo. Se muestra en ellas que ciertas potencias del operador T de un vector arbitrario x, aproximan bien en la norma de ℓ^1, a polinomios arbitrarios de T de otro vector cualquiera de ℓ^1. Pero este último vector arbitrario es la imagen del vector e_0 (cíclico para T) por medio de un polinomio p. Usando el Lema 1.15 y el comportamiento de T en ciertos subspacios de ℓ^1, llegamos a que cada componente del vector x iterado por el operador $T^{c_n^k}$, aproxima bien a un vector cíclico. En la sección 10 damos la prueba del resultado principal de este trabajo: *Todo vector no nulo de ℓ^1 es hipercíclico para el operador T.* También se prueba que el espectro puntual aproximado de T es la bola unidad de $\mathbb{C}$.

EL OPERADOR DE READ

1. Preliminares

En esta primera sección se realizan definiciones y afirmaciones referidas a sucesiones $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ estrictamente crecientes que cumplen cierta propiedad de crecimiento y donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de números naturales, es decir, $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Cabe destacar la importancia del concepto de 'proposición verdadadera para sucesiones que crecen suficientemente rápido' y que será fundamental durante todo el desarrollo de este trabajo. Las afirmaciones serán de la forma '$\boldsymbol{P}$ es verdadera para toda sucesión $\boldsymbol{d}$ que crezca suficientemente rápido', donde $\boldsymbol{P}$ es una proposición que *depende* de la sucesión $\boldsymbol{d}$, es decir, la proposición será verdadera o falsa en función de la sucesión $\boldsymbol{d}$.

Recordemos que ℓ^1 es el espacio de las sucesiones de números complejos $x = (x_n)_{n\geq 0}$ para las cuales

$$\|x\| = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$$

es finita. Sea $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ la base canónica de vectores unitarios de ℓ^1, es decir, e_i es de coordenadas nulas salvo la i-ésima que es uno:

$$e_i = (0,\ 0,\ 0, \dots,\ 0, \overbrace{\ 1\ }^{i)},\ 0, \dots).$$

NOTA 1.1. Durante el desarrollo de este trabajo el símbolo $\boldsymbol{d}$ siempre denotará una sucesión $(d_i)_{i=1}^{\infty}$ estrictamente creciente.

DEFINICIÓN 1.2. *Sea $\boldsymbol{P}$ una proposición definida sobre el conjunto de las sucesiones estrictamente crecientes en el conjunto $\{1, 0\}$, (verdadero, falso). Diremos que $\boldsymbol{P}$ es verdadera para toda sucesión $\boldsymbol{d}$ que crece suficientemente rápido si existe una constante $c \in \mathbb{N}$ y una sucesión de funciones $(f_i)_{i=1}^{\infty}$,*

$$f_i : \overbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}^{\text{i) veces}} \longrightarrow \mathbb{N},$$

con la siguiente propiedad:

Si la sucesión $\boldsymbol{d}$ *satisface que* $d_1 > c$ *y para todo* $r \in \mathbb{N}$

$$d_{r+1} > f_r(d_1, d_2, ..., d_r), \tag{1.2.1}$$

entonces la proposición $\boldsymbol{P}$ *es cierta para* $\boldsymbol{d}$.

En esta sección y posteriores estudiamos proposiciones que dependen de una sucesión $\boldsymbol{d}$. Nuestro interés se centra en sucesiones $\boldsymbol{d}$ que crecen muy rapidamente, lo suficiente como para que una proposición sea cierta para $\boldsymbol{d}$. Veamos un ejemplo para aclarar este concepto.

Ejemplo 1. Consideremos la proposición **P1**: 'La sucesión $\boldsymbol{d}$ es de términos consecutivos'.
P1 es una proposición que depende de la sucesión $\boldsymbol{d}$ y por tanto será verdadera o falsa en función de la sucesión $\boldsymbol{d}$. Si tomamos la sucesión de los números naturales, **P1** es verdadera. Pero no lo es para toda sucesión $\boldsymbol{d}$ que crezca suficientemente rápido. Si **P1** fuera verdadera para toda sucesión $\boldsymbol{d}$ creciendo suficientemente rápido entonces existirían $c \in \mathbb{N}$ y una sucesión de funciones $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ tales que si $\boldsymbol{d}$ cumple (1.2.1) entonces $\boldsymbol{d}$ es de términos consecutivos. En particular, podemos construir la siguiente sucesión: $d'_1 = c + 1$ y

$$d'_{r+1} = \max\{f_r(d'_1, \dots, d'_r), d'_r\} + 2, \quad \text{para todo } r \geq 1,$$

que no es de términos consecutivos y cumple la propiedad (1.2.1). Luego **P1** no es cierta para toda sucesión $\boldsymbol{d}$ que crezca suficientemente rápido.

Utilizaremos muy a menudo los dos lemas siguientes durante el desarrollo de este trabajo que resultan de la definición dada.

LEMA 1.3. *Sea* $\boldsymbol{P}$ *una proposición que depende de una sucesión* $\mathbf{d}$ *estrictamente creciente. Supongamos que* $\boldsymbol{P}$ *es cierta para toda sucesión* $\mathbf{d}$ *que crece suficientemente rápido. Entonces existe una sucesión* $\mathbf{d} \subset \mathbb{N}$ *estrictamente creciente para la cual* $\boldsymbol{P}$ *es cierta.*

LEMA 1.4. *Sea* $(\boldsymbol{P}_i)_{i=1}^N$ *una colección de proposiciones, cada una de ellas que dependen de una sucesión* $\mathbf{d} \subset \mathbb{N}$ *estrictamente creciente. Supongamos que para cada* i*,* $1 \leq i \leq N$*, la proposición* $\boldsymbol{P}_i$ *es cierta para toda sucesión* $\mathbf{d}$ *que crece suficientemente rápido. Entonces* $\bigwedge_{i=1}^N \boldsymbol{P}_i$ *es cierta para toda sucesión* $\mathbf{d}$ *que crece suficientemente rápido.*

Demostración. Tenemos que para cada proposición $\boldsymbol{P}_i$ con $1 \leq i \leq n$, existen $c^{(i)} \in \mathbb{N}$ y funciones $(f_r^{(i)})_{r=1}^{\infty}$ tales que si $\boldsymbol{d}$ cumple

$$d_{r+1} > f_r^{(i)}(d_1, d_2, d_3, \dots, d_r) \qquad r \in \mathbb{N},$$

entonces $\boldsymbol{P}_i$ es cierta para $\boldsymbol{d}$. Basta tomar $c = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{c^{(i)} : c^{(i)} \in \mathbb{N}\right\}$ y funciones $f_r = \max\left\{f_r^{(i)} : 1 \leq i \leq N\right\}$ para cada $r \geq 1$. Si

$$\begin{aligned} d_{r+1} &> f_r(d_1, d_2, \dots, d_r) \\ &= \max\left\{f_r^{(i)}(d_1, d_2, \dots, d_r) : \ 1 \leq i \leq N\right\} \\ &\geq f_r^{(i)}(d_1, d_2, \dots, d_r) \end{aligned}$$

para todo $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq N$ entonces $\boldsymbol{P}_i$, $1 \leq i \leq n$, es cierta para $\boldsymbol{d}$. Por tanto, $\bigwedge_{i=1}^N \boldsymbol{P}_i$ es cierta para toda sucesión $\boldsymbol{d}$ que crezca suficientemente rápido. $\square$

Veamos ahora otro ejemplo.

Ejemplo 2. Consideramos la proposición **P2**: 'La sucesión $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i=1}^{\infty}$ satisface $i^{100}/d_i < 1/2$ para todo $i \geq 1$'. Nos preguntamos si **P2** es cierta para sucesiones que crecen suficientemente rápido. De nuevo **P2** depende de la sucesión $\boldsymbol{d}$ y observamos que va a ser cierta si tomamos los elementos d_i 'suficientemente grandes'.
Si escogemos como sucesión $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i=1}^{\infty} = (i^2)_{i=1}^{\infty}$, $c = 1$ y $f_i = 1$ para todo i, se cumple (1.2.1) pero la proposición **P2** no es verdadera puesto que

$$\frac{i^{100}}{i^2} = i^{98} > \frac{1}{2} \qquad \text{para todo } i \geq 1.$$

Cabe preguntarse si existen $c \in \mathbb{N}$ y funciones $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ de modo que establezcan el grado de crecimiento de la sucesión $\boldsymbol{d}$ para que resulte verdadera la propiedad **P2** en el sentido de la Definición 1.2. En efecto, para toda sucesión $\boldsymbol{d}$ que verifique (1.2.1) con

$$f_i(d_1, \ldots, d_i) = 2(i+1)^{100} \qquad \text{y} \qquad c = 2,\ i \geq 1$$

cumple la propiedad dada por **P2**, que es

$$\frac{1}{d_1} < \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{i^{100}}{d_i} < \frac{1}{2} \qquad \text{para todo } i \geq 2.$$

Por tanto, **P2** es cierta para toda sucesión $\boldsymbol{d}$ que crezca suficientemente rápido.

Cabe destacar la importancia de las funciones f_i cuando se trata de establecer el grado de crecimiento de la sucesión $\boldsymbol{d}$ en relación con los propios términos de la sucesión. En muchas ocasiones f_i dependerá explicitamente de algunos de los i primeros términos de la sucesión $\boldsymbol{d}$. Veamos esto con otro ejemplo.

Ejemplo 3. Consideramos la proposición **P3**: 'La sucesión $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i=1}^{\infty}$ satisface

$$d_{i+1} - \prod_{k=1}^{i} d_k > \tfrac{1}{2} d_{i+1} \qquad \forall i \geq 1\text{'}.$$

Es evidente que no toda sucesión estrictamente creciente cumple esta propiedad. Veamos que **P3** es cierta para toda sucesión $\boldsymbol{d}$ que crece suficientemente rápido. Basta tomar $c = 0$ y $f_i(d_1, \ldots, d_i) = 2\prod_{k=1}^{i} d_k$ para comprobar que **P3** es cierta para toda sucesión $\boldsymbol{d}$ creciendo suficientemente rápido.

Tenemos el siguiente Lema.

LEMA 1.5. *Sean $\boldsymbol{\delta} = (\delta_i)_{i=1}^{\infty}$ y $\boldsymbol{\delta}' = (\delta_i')_{i=1}^{\infty}$ dos sucesiones de enteros con una cantidad finita de términos no nulos , tales que $0 \leq \delta_i \leq i$ y $0 \leq \delta_i' \leq i$ para todo i y $J = \max\{j : \delta_j' \neq \delta_j\}$. Si la sucesión $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido, entonces*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i' d_i > \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i d_i \quad \textit{si y sólo si} \quad \delta_J' > \delta_J.$$

Además, en tal caso se satisface

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^{'} d_i > \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i d_i + \tfrac{1}{2} d_J. \tag{1.5.1}$$

Demostración. Es suficiente elegir $\boldsymbol{d}$ tal que para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$d_{i+1} > 2 \sum_{j=1}^{i} j d_j. \tag{1.5.2}$$

Definimos $f_i(d_1, d_2, \ldots, d_i) = 2 \sum_{j=1}^{i} j d_j$. Ahora si

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^{'} d_i > \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i d_i,$$

entonces, puesto que $\delta_i = \delta_i^{'}$ para $i > J$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{J} \delta_i^{'} d_i > \sum_{i=1}^{J} \delta_i d_i.$$

Se sigue que

$$\sum_{i=1}^{J-1} (\delta_i^{'} d_i - \delta_i d_i) > (\delta_J - \delta_J^{'}) d_J.$$

Ahora por (1.5.2)

$$\begin{aligned}(\delta_J - \delta_J^{'}) d_J &< \sum_{i=1}^{J-1} (\delta_i^{'} - \delta_i) d_i \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^{J-1} i d_i \\ &< d_J.\end{aligned}$$

Por tanto, puesto que δ_J y $\delta_J^{'}$ son enteros tenemos que $\delta_J - \delta_J^{'} < 0$.
Recíprocamente, si $\delta_J^{'} > \delta_J$ entonces

$$\begin{aligned}(\delta_J^{'} - \delta_J) d_J &\geq d_J \\ &> 2 \sum_{j=1}^{J-1} j d_j && \text{(ya que } \boldsymbol{d} \text{ cumple (1.5.2))} \\ &\geq \sum_{j=1}^{J-1} (\delta_j - \delta_j^{'}) d_j.\end{aligned}$$

Por tanto se sigue que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^{'} d_i > \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i d_i.$$

Probemos ahora (1.5.1);

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^{'} d_i - \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i d_i &= \sum_{i=1}^{J-1} (\delta_i^{'} - \delta_i) d_i + (\delta_J^{'} - \delta_J) d_J \\
&\geq \sum_{i=1}^{J-1} (\delta_i^{'} - \delta_i) d_i + d_J \\
&\geq -\sum_{i=1}^{J-1} \delta_i d_i + d_J \\
&\geq -\sum_{i=1}^{J-1} i d_i + d_J && \text{(puesto que } 0 \leq \delta_i \leq i) \\
&> -\frac{d_J}{2} + d_J && \text{(utilizando (1.5.2))} \\
&= \frac{d_J}{2}. && \square
\end{aligned}$$

Supondremos para el resto del trabajo que si una propiedad $\boldsymbol{P}$ es verdadera para toda sucesión $\boldsymbol{d}$ que crece suficientemente rápido, entonces todas las sucesiones $\boldsymbol{d}$ que se consideren a partir de entonces también satisfacerán $\boldsymbol{P}$. Así por ejemplo, el Lema 1.5 proporciona una fácil pero importante propiedad de la sucesión $\boldsymbol{d}$ referida a combinaciones lineales de elementos de $\boldsymbol{d}$. Por tanto, supondremos que toda sucesión $\boldsymbol{d}$ que crezca suficientemente rápido posee esta propiedad.

DEFINICIÓN 1.6. *Definimos la norma de un polinomio $p = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i t^i$ como la suma de los módulos de sus coeficientes, esto es, $|p| = \sum_{i=0}^{N} |\lambda_i|$. Denotaremos* $\mathrm{gr}(p)$ *el grado del polinomio p, y $|p|_\infty$ para el módulo máximo de los coeficientes del polinomio, es decir,*

$$|p|_\infty = \max\big\{|\lambda_i| : \; 0 \leq i \leq N\big\}.$$

DEFINICIÓN 1.7. *Sea J cualquier subconjunto de $\mathbb{N}$, y sea $S = \{e_i : i \in J \subseteq \mathbb{N}\}$. Definimos π_S como la proyección dada por $\pi_S : \ell^1 \longrightarrow \overline{\mathrm{span}}(S)$ definida por*

$$\pi_S(e_i) = \begin{cases} e_i & \textit{si } e_i \in S \\ 0 & \textit{si } e_i \notin S, \end{cases} \qquad \textit{o, equivalentemente} \qquad \pi_J(e_i) = \begin{cases} e_i & \textit{si } i \in J \\ 0 & \textit{si } i \notin J. \end{cases}$$

DEFINICIÓN 1.8. *Sean X un espacio de Banach e I un conjunto de índices. Dado $\varepsilon > 0$ se dice que Γ es una ε-red sobre el conjunto $C \subseteq X$ si, para todo $x \in C$ existe $y_i \in \Gamma$ tal que $\|x - y_i\| < \varepsilon$ con $i \in I$.*

Además, si para toda ε-red Φ (J un conjunto de índices) sobre C, la aplicación

$$\Theta : \Gamma \longrightarrow \Phi; \quad y_i \in \Gamma \mapsto \Theta(y_i) = x_j \quad \text{con } x_j \in \big(B(y_i, \varepsilon) \bigcap \Phi\big); \; i \in I, j \in J$$

es inyectiva, entonces se dice que Γ es minimal.

Puesto que la aplicación Θ induce un orden parcial sobre el conjunto de las ε-redes, la existencia de elemento minimal se deduce del Lema de Zorn. Señalamos que en general una ε-red minimal no es única.

Para cada entero $\nu \geq 0$, denotamos por $(P_\nu, |\cdot|)$ el espacio de Banach finito dimensional de los polinomios de grado a lo sumo ν, con la norma $|\cdot|$ dada en la Definición 1.6. Fijemos para el resto de este trabajo una ε-red minimal para la bola unidad de P_ν, que denotaremos por Γ_ν, donde $\varepsilon = 4^{-\nu}$ y $M(\nu)$ será el número de elementos de Γ_ν. Entonces

$$\Gamma_\nu = \big\{\bar{p}_{i,\nu} : \; 1 \leq i \leq M(\nu)\big\}.$$

Para cualquier sucesión $\boldsymbol{d} = (d_i)_{i=1}^\infty$ definimos las subsucesiones $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i=1}^\infty$, $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^\infty$ y $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i=1}^\infty$, donde $a_i = d_{3i-2}$, $b_i = d_{3i-1}$ y $c_i = d_{3i}$. Así $a_1 < b_1 < c_1 < a_2 < b_2 < c_2 < a_3 < \dots$.

DEFINICIÓN 1.9. *Para cada sucesión $\boldsymbol{d}$, definimos las cuatro sucesiones siguientes:*

$$\xi_0 = 0,$$

$$\mu_n = n a_n, \qquad \nu_n = n(a_n + b_n),$$

$$h_n = E(2\log_2 c_n), \qquad \xi_n = \nu_n + h_n \sum_{j=1}^{M(\nu_n)} c_n^j$$

donde $E(x) = [x] + 1$, es decir, el menor entero mayor o igual que x.

DEFINICIÓN 1.10. *Para cada sucesión $\boldsymbol{d}$, se define Λ_n como el conjunto de todos los polinomios no nulos $p(t)$ que cumplen las siguientes propiedades:*

(i) *p es de coeficientes enteros no negativos,*
(ii) *$|p|_\infty \leq h_n$,*
(iii) *$\mathrm{gr}(p) \leq M(\nu_n)$,*
(iv) *$p(0) = 0$.*

DEFINICIÓN 1.11. *Sean* $p_1, p_2 \in \Lambda_n \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$. *Definimos el orden lexicográfico* $<$ *sobre* $\Lambda_n \cup \{0\}$ *de la siguiente forma:*
Si $p_i(t) = \sum_{j=1}^{M(\nu_n)} \alpha_{ij} t^j$ $(i = 1,\ 2)$ *entonces*

$$p_1 < p_2 \quad \textit{si y sólo si} \quad \alpha_{1J} < \alpha_{2J}$$

donde $J = \max\{j :\ \alpha_{1j} \neq \alpha_{2j}\}$.

La razón de establecer el orden lexicográfico dado en la Definición 1.11 se encuentra en el siguiente lema.

LEMA 1.12. *Si* $\boldsymbol{d}$ *crece suficientemente rápido entonces para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y todo polinomio* $p_1,\ p_2 \in \Lambda_n \cup \{0\}$ *tales que* $p_1 < p_2$, *se tiene que*

$$p_2(c_n) - p_1(c_n) \geq c_n; \tag{1.12.1}$$

y también

$$p_2(c_n) - p_1(c_n) > \tfrac{3}{4} c_n^J \tag{1.12.2}$$

donde $J = \max\{j :\ \alpha_{1j} \neq \alpha_{2j}\}$ *con la notación de la Definición 1.11.*

Demostración. Sea $J = \max\{j :\ \alpha_{1j} \neq \alpha_{2j}\}$ dado por la Definición 1.11. Puesto que t divide a p_i $(i = 1,\ 2)$ entonces

$$\begin{aligned} p_2(c_n) - p_1(c_n) &= c_n \left(\sum_{j=1}^{J-2} (\alpha_{2j} - \alpha_{1j}) c_n^j + (\alpha_{2J} - \alpha_{1J}) c_n^{J-1} \right) \\ &\geq c_n \end{aligned}$$

si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido. Probemos ahora (1.12.2);

$$\begin{aligned} p_2(c_n) - p_1(c_n) &= \sum_{j=1}^{M(\nu_n)} (\alpha_{2j} - \alpha_{1j}) c_n^j \\ &= \sum_{j=1}^{J} (\alpha_{2j} - \alpha_{1j}) c_n^j \qquad \text{(de la definición de } J) \\ &= (\alpha_{2J} - \alpha_{1J}) c_n^J + \sum_{j=1}^{J-1} (\alpha_{2j} - \alpha_{1j}) c_n^j \\ &\geq c_n^J - |p_1| c_n^{J-1} \qquad \text{(ya que } \alpha_{2j}, \alpha_{1j} \geq 0) \\ &\geq c_n^J - \mathrm{gr}(p_1) \cdot |p_1|_\infty \cdot c_n^{J-1} \\ &\geq c_n^J - M_1(\nu_n) \cdot h_n \cdot c_n^{J-1} \qquad \text{(por 1.10)} \\ &> \tfrac{3}{4} c_n^J \end{aligned}$$

si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido, ya que $M(\nu_n)$ sólo depende de $n,\ a_n$ y b_n. $\square$

DEFINICIÓN 1.13. *Denotamos $\hat{p}_n$ el máximo de $(\Lambda_n, <)$, que es*

$$\hat{p}_n(t) = h_n \sum_{k=1}^{M(\nu_n)} t^k.$$

Si $p < \hat{p}_n$ y $p \in \Lambda_n \cup \{0\}$, escribiremos p^+ para el sucesor de p en $\big(\Lambda_n \cup \{0\}, <\big)$, y

$$J(p) = \max\big\{k : \ \alpha_k \neq \alpha_k^+\big\}$$

donde α_k y α_k^+ son los coeficientes de los polinomios p y p^+ respectivamente.

DEFINICIÓN 1.14. *Sea $(w_i)_{i=0}^{\infty}$ una sucesión de vectores linealmente independientes y V el espacio vectorial infinito-dimensional engendrado por dichos vectores: $V = span\{w_i : i \geq 0\}$. Sea T el operador desplazamiento a la derecha $T : V \to V$ definido por $Tw_i = w_{i+1}$ para todo $i \geq 0$.*

Para terminar esta sección definiremos una base especial $\big\{w_i\big\}_{i=1}^{\infty}$ de V dependiendo de la sucesión $\boldsymbol{d}$. Además, si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido, probaremos que existe un isomorfismo (algebraico) entre $\text{span}\big\{w_i : 1 \leq i \leq N\big\}$ y $\text{span}\big\{e_i : 1 \leq i \leq N\big\}$ para todo $N \in \mathbb{N}$ (nótese que aun no hemos dotado al espacio V de una norma).

Consideremos $0 = \xi_0 < \nu_1 + h_1 \sum_{j=1}^{M(\nu_1)} c_1^j = \xi_1 < \nu_2 + h_2 \sum_{j=1}^{M(\nu_2)} c_2^j = \xi_2 < \dots$. Los conjuntos $\{0\}, (\xi_{n-1}, \xi_n]$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ forman una partición de $\mathbb{N}$. Si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido entonces cada intervalo $(\xi_{n-1}, \xi_n]$ se puede dividir en unión disjunta de los conjuntos no vacíos $(\xi_{n-1}, na_n]$ y $(na_n, \xi_n]$. Pero $(\xi_{n-1}, na_n]$ es la unión disjunta de los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned}
(\xi_{n-1}, a_n) &\cup [a_n, a_n + \xi_{n-1}] \cup (a_n + \xi_{n-1}, 2a_n) \\
&\cup [2a_n, 2a_n + \xi_{n-2}] \cup (2a_n + \xi_{n-2}, 3a_n) \\
&\qquad \vdots \\
&\cup [ra_n, ra_n + \xi_{n-r+1}] \cup \big((r-1)a_n + \xi_{n-r+1}, ra_n\big) \\
&\qquad \vdots \\
&\cup [(n-1)a_n, (n-1)a_n + \xi_1] \cup \big((n-1)a_n + \xi_1, na_n\big) \\
&\cup \{na_n\}.
\end{aligned}$$

Denotaremos $G_1 = \bigcup_{r=1}^{n} G_1^{(r,n)}$ donde $G_1^{(r,n)} = [ra_n, ra_n + \xi_{n-r}]$ y, así mismo escribimos $G_2 = \left(\bigcup_{r=2}^{n} G_2^{(r,n)}\right) \cup (\xi_{n-1}, a_n)$ donde $G_2^{(r,n)} = \big((r-1)a_n + \xi_{n-r+1}, ra_n\big)$. Así

$$(\xi_{n-1}, na_n] = G_1 \cup G_2.$$

Por otro lado, $(na_n, \xi_n]$ también es la unión disjunta de los conjuntos

$$\begin{aligned}
&\big(na_n, (a_n+b_n)\big) \cup [(a_n+b_n), na_n+b_n] \\
&\quad \cup \big(na_n+b_n, 2(a_n+b_n)\big) \cup [2(a_n+b_n), na_n+2b_n] \\
&\quad \cup \big(na_n+2b_n, 3(a_n+b_n)\big) \cup [3(a_n+b_n), na_n+3b_n] \\
&\qquad\quad \vdots \\
&\quad \cup \big(na_n+(r-1)b_n, r(a_n+b_n)\big) \cup [r(a_n+b_n), na_n+rb_n] \\
&\qquad\quad \vdots \\
&\quad \cup \big(na_n+(n-1)b_n, \nu_n\big) \cup \{\nu_n\} \\
&\quad \cup (\nu_n, \xi_n].
\end{aligned}$$

Denotaremos $G_3 = \bigcup_{r=1}^n G_3^{(r,n)}$ donde $G_3^{(r,n)} = \big(na_n+(r-1)b_n, r(a_n+b_n)\big)$ y $G_4 = \bigcup_{r=1}^n G_4^{(r,n)}$ donde $G_4^{(r,n)} = [r(a_n+b_n), na_n+rb_n]$. Así

$$(\xi_{n-1}, na_n] = G_3 \cup G_4 \cup (\nu_n, \xi_n].$$

Además, el intervalo $(\nu_n, \xi_n]$ se divide también en unión de intervalos disjuntos (si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&(\nu_n, c_n) \cup [c_n, c_n+\nu_n] \cup (c_n+\nu_n, 2c_n) \\
&\qquad \cup [2c_n, 2c_n+\nu_n] \cup (2c_n+\nu_n, 3c_n) \\
&\qquad\quad \vdots \\
&\qquad \cup [p(c_n), p(c_n)+\nu_n] \cup \big(p(c_n)+\nu_n, p^+(c_n)\big) \qquad\qquad \big(p \in \Lambda_n,\ p \in \Lambda_n \cup \{0\} \text{ resp.}\big) \\
&\qquad\quad \vdots \\
&\qquad \cup [\hat{p}(c_n), \xi_n].
\end{aligned}$$

Denotaremos $G_5^{(n)} = \bigcup_{\substack{p\in\Lambda_n \\ \mathrm{d}=\mathrm{gr}(p)}} [p(c_n), p(c_n)+\nu_n]$ y $G_6^{(n)} = \bigcup_{\substack{p\in\Lambda_n\cup\{0\}, \\ p<\hat{p},\ \mathrm{d}=\mathrm{gr}(p)}} \big(p(c_n)+\nu_n, p^+(c_n)\big)$. Así

$$(\nu_n, \xi_n] = G_5^{(n)} \cup G_6^{(n)}.$$

Teniendo en mente esta partición de $\mathbb{N}$, daremos el lema principal de esta sección. Sea $F = \operatorname{span}\{e_i : i \geq 0\}$ el espacio vectorial generado por los vectores básicos $(e_i)_{i\geq 0}$, el cual es obviamente denso en ℓ^1, y para cada $n \geq 0$, consideramos el subespacio (n+1)-dimensional $F_n = \operatorname{span}\{e_i : 0 \leq i \leq n\}$.

LEMA 1.15. *Si una sucesión* $\boldsymbol{d}$ *crece suficientemente rápido entonces existe un isomorfismo algebraico* $\theta : F \to V$ *con las siguientes propiedades:*

(1.15.0) $\theta(e_0) = w_0$.

(1.15.1) *Si los enteros* $r,\ n,\ i$ *satisfacen* $1 \le r \le n,\ i \in G_1^{(r,n)}$ *entonces*

$$\theta(e_i) = a_{n-r}(w_i - w_{i-ra_n}) \qquad (\text{con } a_0 = 1).$$

(1.15.2) *Si los enteros* $r,\ n,\ i$ *satisfacen* $2 \le r \le n,\ i \in G_2^{(r,n)}$ *(respectivamente,* $n \ge 1,\ i \in (\xi_{n-1}, a_n))$*, entonces*

$$\theta(e_i) = 2^{(h-i)/\sqrt{a_n}} \cdot w_i,$$

donde $h = (r - \frac{1}{2})a_n$ *(respectivamente,* $h = \frac{1}{2}a_n$*)*

(1.15.3) *Si los enteros* $r,\ n,\ i$ *satisfacen* $1 \le r \le n,\ i \in G_3^{(r,n)}$*, entonces*

$$\theta(e_i) = 2^{(h-i)/\sqrt{b_n}} \cdot w_i,$$

donde $h = (r - \frac{1}{2})b_n$.

(1.15.4) *Si los enteros* $r,\ n,\ i$ *satisfacen* $1 \le r \le n,\ i \in G_4^{(r,n)}$*, entonces*

$$\theta(e_i) = w_i - b_n w_{i-b_n}.$$

(1.15.5) *Si para algún polinomio* $p \in \Lambda_n$ *se tiene que* $i \in G_5^{(n)}$*, sea* $d = \mathrm{gr}(p)$*. Entonces*

$$\theta(e_i) = 2^{1-|p|} \cdot c_n\big(w_i - \bar{p}_{d,\nu_n}(T) w_{i-c_n^d}\big),$$

donde T *es el operador desplazamiento a la derecha unilateral (definido en 1.14).*

(1.15.6) *Si* $p < \hat{p}_n,\ p \in \Lambda_n \cup \{0\}$ *y* $i \in G_6^{(n)}$*, entonces*

$$\theta(e_i) = 2^{(h-i)/c_n^{J(p)-1/2}} \cdot w_i,$$

donde $h = (p(c_n) + p^+(c_n))/2$ *y* $J(p)$ *está dado como en la definición 1.13.*

Demostración. Si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido, entonces $\mathbb{N}$ se descompone en unión disjunta de los conjuntos (no vacíos) considerados en el enunciado del lema. Por otra parte, $\theta(e_i) = \sum_{j=0}^{i} \lambda_{ij} w_j$ con $\lambda_{ii} \ne 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por tanto, la matriz asociada a θ es triangular superior cuyos elementos en la diagonal principal son todos no nulos y así, θ es isomorfismo (algebraico). $\square$

NOTA 1.16. Además, $\mathrm{span}\{w_i : 0 \le i \le n\} = \theta\big(\mathrm{span}\{e_i : 0 \le i \le n\}\big) = F_n$ para todo $n \ge 0$. Por tanto, identificaremos V con el subespacio denso F de ℓ^1 mediante el isomorfismo θ.

Si $x = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i w_i \in F$, denotaremos $|x| = \sum_{i=0}^{N} |\lambda_i|$. Así $\big(V, |\cdot|\big)$ es un espacio normado. Sea $I_n : (F_n, |\cdot|) \longrightarrow (F_n, \|\cdot\|)$ $n \ge 0$, la aplicación definida por $I_n(w_i) = e_i,\ 0 \le i \le n$ y $B_n = \big(\beta_{ij}\big)_{i,j=1}^{n}$ la matriz correspondiente a esta aplicación. Observamos que si $n = \mu_m$ (respectivamente $n = \nu_m$ o $n = \xi_m$) para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces la norma $\|\cdot\|$ en F_n sólo depende del espacio ℓ^1, de la elección de m, y $\{a_i\}_{i=1}^m$, $\{b_i,\ c_i :\ 1 \le i \le m-1\}$ (respectivamente m, $\{a_i,\ b_i :\ 1 \le i \le m\}$, $\{c_i\}_{i=1}^{m-1}$ o $\{a_i,\ b_i,\ c_i :\ 1 \le i \le m\}$). Por ejemplo, si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido entonces B_{μ_m} es triangular superior con los elementos de la diagonal principal no nulos. Por tanto el determinante de (B_{μ_m}) es menor o igual que 2^{a_m}. En general, si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido entonces el determinante de (B_{d_k}) es menor o igual que 2^{d_k}.

Tenemos el siguiente lema.

LEMA 1.17. *Si la sucesión* $\boldsymbol{d}$ *crece suficientemente rápido entonces existen funciones*

$$M_1, M_2, M_3 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

tales que para todo $m \in \mathbb{N}$

$$\max\left\{\|I_{\mu_m}\|,\ \|I_{\mu_m}^{-1}\|\right\} \leq M_1(m, a_m) \tag{1.17.1}$$

$$\max\left\{\|I_{\nu_m}\|,\ \|I_{\nu_m}^{-1}\|\right\} \leq M_2(m, b_m) \tag{1.17.2}$$

$$\max\left\{\|I_{\xi_m}\|,\ \|I_{\xi_m}^{-1}\|\right\} \leq M_3(m, c_m) \tag{1.17.3}$$

donde $\|I_m\| = \sup_{\|u\|=1} \|I_m u\|_1$.

NOTA 1.18. La aplicación $T : w_i \to w_{i+1}$ $(i \geq 0)$ se considerará como una aplicación en F. El trabajo consistirá en probar que, si la sucesión $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido, entonces este operador es contínuo y se extiende con continuidad a un operador hipercíclico en ℓ^1.

2. Definiciones de algunos operadores en F

En esta sección definimos algunas proyecciones sobre el espacio F que son fundamentales para obtener el resultado perseguido en este trabajo: la hiperciclicidad de todo vector no nulo del espacio.

DEFINICIÓN 2.1. *Sea Q_m $(m \geq 1)$ la proyección $F \to F_{\mu_m}$ tal que*

$$Q_m(e_j) = \begin{cases} e_j, & 0 \leq j \leq \mu_m, \\ e_{j-ra_n+(r-n+m)a_m}, & j \in G_1^{(r,n)}, \quad 0 < n-m < r \leq n, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

La proyección Q_m está bien definida puesto que $j-ra_n+(r-n+m)a_m \in G_1^{(r-n+m,m)} \subset [0, \mu_m]$.

DEFINICIÓN 2.2. *Sea R_m° $(m \geq 1)$ la proyección $F \to F_{\xi_m}$ tal que*

$$R_m^\circ(e_j) = \begin{cases} e_j, & 0 \leq j \leq \xi_m, \\ -a_{n-r} w_{j-ra_n}, & j \in G_1^{(r,n)}, \quad 0 < n-m < r \leq n, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

y sea $Q_m^\circ = (I - \pi_S) \circ R_m^\circ$ donde $S = \{e_i : \mu_m < i \leq \xi_m\}$ e I es la aplicación identidad.

Por la Nota 1.16, la proyección R_m° está bien definida pues $j - ra_n \in [0, \xi_{n-r}] \subset [0, \xi_m]$.

NOTA 2.3. Sea $S = \{e_i : \mu_m < i \leq \xi_m\}$. De la Definición 2.2,

$$Q_m^\circ(e_j) = \begin{cases} e_j, & 0 \leq j \leq \mu_m, \\ -a_{n-r}\big(I - \pi_S\big) w_{j-ra_n}, & j \in G_1^{(r,n)}, \quad 0 < n-m < r \leq n, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como $\theta\big(\text{span}\{e_i : 0 \leq i < a_m\}\big) = \text{span}\{w_i : 0 \leq i < a_m\}$ entonces $w_{j-ra_n} = \sum_{k=0}^{a_m-1} \alpha_k e_k$; además $j - ra_n \leq \xi_{n-r} < a_m < \mu_m$. Ahora por 1.7 se tiene que $\pi_S\big(w_{j-ra_n}\big) = \pi_S\big(\sum_{k=0}^{a_m-1} \alpha_k e_k\big) = 0$. Por tanto,

$$Q_m^\circ(e_j) = \begin{cases} e_j, & 0 \leq j \leq \mu_m, \\ -a_{n-r} w_{j-ra_n}, & j \in G_1^{(r,n)}, \quad 0 < n-m < r \leq n, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, Q_m° es una proyección $F \to F_{\mu_m}$ y está bien definida. Además, se obtiene facilmente que $R_m^\circ - Q_m^\circ = \pi_S \circ R_m^\circ = \pi_S$.

DEFINICIÓN 2.4. *Sea $P_{n,m}$ $(m > n \geq 1)$ el operador $\tau_{nm} \circ Q_m$ donde*

$$\tau_{nm} : F_{\mu_m} \to F_{\mu_m} \quad \textit{con} \quad \tau_{nm}(w_j) = \begin{cases} w_j, & 0 \leq j < (m-n)a_m, \\ 0, & (m-n)a_m \leq j \leq ma_m. \end{cases}$$

3. Lemas preliminares

LEMA 3.1. $\|Q_m\| = 1$ *para todo* m.

Demostración. Puesto que $\|Q_m(e_j)\| = 1$ o 0 para todo j, y la norma de la proyección Q_m sobre ℓ^1 es $\sup_j \|Q_m(e_j)\|$ se sigue el resultado. $\square$

LEMA 3.2. *Si* $\boldsymbol{d}$ *crece suficientemente rápido entonces* $\|Q_m^\circ\| < a_m$ *y* $\|R_m^\circ\| < a_m$ *para todo* m.

Demostración. $R_m^\circ(e_j)$ es e_j o 0 a menos que $j \in G_1^{(r,n)}$ con $0 < n - m < r \leq n$; además $\xi_{n-r} \leq \xi_{m-1}$. Por tanto se tiene que

$$\begin{aligned}
\|R_m^\circ(e_j)\| =& a_{n-r}\|w_{j-ra_n}\| \leq a_{m-1}\|w_{j-ra_n}\| \\
=& a_{m-1}\|I_{\xi_{m-1}}^{-1}(e_{j-ra_n})\| \\
\leq& a_{m-1} \cdot M_3(m-1, c_{m-1}) < a_m \qquad \text{(por (1.17.3))}
\end{aligned}$$

si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido. Además $\|Q_m^\circ\| \leq \|I - \pi_S\| \cdot \|R_m^\circ\| = \|R_m^\circ\|$ lo cual concluye la prueba. $\square$

LEMA 3.3. *Si* $\boldsymbol{d}$ *crece suficientemente rápido entonces* $\|P_{nm}\|$, $\|\tau_{nm}\|$ *y* $\|Q_n \circ P_{nm}\|$ *son menores o iguales que* $a_n \cdot M_3(n, c_n) < a_{n+1}$ *para todo* $1 \leq n < m$.

Demostración. Puesto que $P_{nm}e_i = \tau_{nm}Q_m e_i$ y, por 2.1, $Q_m(e_i)$ es cero o e_j para algún $j \in [0, \mu_m]$ entonces $\sup_i \|P_{nm}e_i\| \leq \max_{0 \leq j \leq \mu_m} \|\tau_{nm}e_j\|$. Ahora de (1.15), (2.4) se tiene que para todo $j \in [0, \mu_m]$,

$$\tau_{nm}(e_j) = \begin{cases}
\tau_{nm}\big(a_{m-r}(w_j - w_{j-ra_m})\big) & j \in G_1^{(r,m)},\ 0 < r \leq m,\ j \geq (m-n)a_m, \\
e_j & \text{si } j < (m-n)a_m \text{ cumple (1.15.1) o (1.15.2)}, \\
0 & \text{si } j \geq (m-n)a_m \text{ cumple (1.15.2)}.
\end{cases}$$

$$= \begin{cases}
-a_{m-r}w_{j-ra_m} & j \in G_1^{(r,m)},\ m-n \leq r \leq m, \\
e_j & \text{si } j < (m-n)a_m \text{ cumple (1.15.1) o (1.15.2)}, \\
0 & \text{si } j \geq (m-n)a_m \text{ cumple (1.15.2)}.
\end{cases}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\max_j \|\tau_{nm} e_j\| &\leq \max\big(1, \sup_{\substack{j \in G_1^{(r,m)} \\ m-n \leq r \leq m}} a_{m-r} \|w_{j-ra_m}\|\big) \\
&\leq \max\big\{1, \ \big(a_n \cdot \max_{i \in [0,\xi_n]} \|w_i\|\big)\big\} \\
&\leq \max\big\{1, \ \big(a_n \cdot \max_{i \in [0,\xi_n]} \|I_{\xi_n}^{-1}(e_i)\|\big)\big\} \\
&\leq a_n \cdot M_3(n, c_n) \qquad \text{(por (1.17.3))}
\end{aligned}$$

Luego si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido entonces,

$$\sup \|P_{nm} e_i\| \leq a_n \cdot M_3(n, c_n) < a_{n+1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que Q_m se comporta como la identidad en el dominio F_{μ_m} de τ_{nm} entonces, $\|\tau_{nm}\| \leq \|\tau_{nm} \circ Q_m\| = \|P_{nm}\|$. Por otro lado, para el operador $Q_n \circ P_{nm}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\sup_i \|Q_n\big(P_{nm}(e_i)\big)\| &\leq \|Q_n\| \cdot a_n \cdot M_3(n, c_n) \\
&= a_n \cdot M_3(n, c_n) \qquad \text{(por 3.1)} \\
&< a_{n+1}
\end{aligned}$$

siempre que $\boldsymbol{d}$ crezca suficientemente rápido. $\square$

Los operadores definidos en las secciones anteriores son absolutamente contínuos y por tanto se extienden con continuidad a ℓ^1. Abusando de la notación, para el resto del trabajo los denotaremos de igual forma.

4. Estimación de $\|\mathbf{T}\|$

En esta sección, si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido, obtenemos la acotación de la norma del operador T y estudiamos su comportamiento sobre la base canónica $\{e_i : i \geq 0\}$ de ℓ^1.

DEFINICIÓN 4.1. *Un operador lineal acotado $T : X \to Y$ se dice nuclear si existen sucesiones $(x_n^*)_n \subseteq X^*$ e $(y_n)_n \subseteq Y$ tales que*

$$(i) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n^*\| \cdot \|y_n\| < \infty$$

$$(ii) \qquad T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^*(x) y_n \qquad \forall x \in X.$$

La norma de un operador nuclear T se define como

$$\|T\|_{\text{nuc}} = \inf_{\substack{x_n^* \in X^* \\ y_n \in Y}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n^*\| \cdot \|y_n\| \right\}.$$

LEMA 4.2. *Sea $\eta > 0$. Si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido entonces $\|T\| \leq 1 + \eta$. Más aun, existen dos subconjuntos R y S de $\mathbb{N}$ no vacíos de modo que $T = T_S + T_R$ siendo $T_S = T \circ \pi_S$ un operador desplazamiento a la derecha unilateral con peso tal que $\|T_S\| \leq 1 + \frac{1}{2}\eta$, y $T_R = T \circ \pi_R$ un operador nuclear con $\|T_R\| \leq \frac{1}{2}\eta$.*

Demostración. Consideramos los conjuntos

$$R_0 = \{0\},$$

$$R_1 = \{ra_n + \xi_{n-r} : 1 \leq r \leq n\}, \qquad R_2 = \{ra_n - 1 : \ 1 \leq r \leq n\},$$

$$R_3 = \{r(a_n + b_n) - 1 : \ 1 \leq r \leq n\}, \qquad R_4 = \{na_n + rb_n : \ 1 \leq r \leq n\},$$

$$R_5 = \{p(c_n) + \nu_n : \ p \in \Lambda_n, \ \text{d=gr}(p)\}, \qquad R_6 = \{p^+(c_n) - 1 : \ p \in \Lambda_n, \ \text{d=gr}(p)\}.$$

Con la notación dada en 1.15, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$, los conjuntos $S_i = G_i \setminus R_i$ $i = 1, 2, \ldots, 6$ (donde hemos denotado $G_5^{(n)} = G_5$ y $G_6^{(n)} = G_6$) y $R = \bigcup_{i=0}^{6} R_i$, $S = \bigcup_{i=1}^{6} S_i$. Si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido, entonces $R \bigcup S = \mathbb{N}$ y $R \bigcap S = \emptyset$. Además, estos conjuntos se definen así para estudiar el comportamiento del operador T actuando sobre los vectores básicos $(e_i)_{i \geq 0}$ de ℓ^1 usando el Lema 1.15; recordemos que $Tw_i = w_{i+1}$, $i \geq 0$. Estudiamos diferentes casos.

Caso 4.2.0. Supongamos que $i = 0 \in R_0$ entonces $w_0 = e_0$, $Te_0 = w_1 = 2^{(1-\frac{a_1}{2})/\sqrt{a_1}} \cdot e_1$; por tanto

$$\|Te_0\| = 2^{(1-\frac{a_1}{2})/\sqrt{a_1}} < \tfrac{1}{2}\eta$$

si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido. Nótese que la identidad $e_1 = 2^{(\frac{a_1}{2}-1)/\sqrt{a_1}} w_1$ proviene de (1.15.2) y por tanto, estamos suponiendo que $1 \in (0, a_1)$, es decir, $a_1 > 1$. Esto no supone pérdida de generalidad pues exigimos durante todo el trabajo que la sucesión $\boldsymbol{d}$ crezca rapidamente.

Caso 4.2.1. Supongamos que $i \in S_1$ entonces,

$$\begin{aligned} Te_i &= T\big(a_{n-r} \cdot (w_i - w_{i-ra_n})\big) \\ &= a_{n-r} \cdot (w_{i+1} - w_{i-ra_n+1}) \\ &= e_{i+1} \end{aligned}$$

puesto que $i+1$ e $i - ra_n + 1$ cumplen (1.15.1). Así $\|Te_i\| = 1 < 1 + \frac{1}{2}\eta$.

Caso 4.2.2. Supongamos que $i \in S_2$ entonces,

$$\begin{aligned} Te_i &= T\big(2^{\frac{h-i}{\sqrt{a_n}}} \cdot w_i\big) \\ &= 2^{\frac{h-i}{\sqrt{a_n}}} \cdot w_{i+1} \\ &= 2^{\frac{h-i}{\sqrt{a_n}}} 2^{\frac{i+1-h}{\sqrt{a_n}}} \cdot e_{i+1} \qquad\qquad \text{(puesto que } i+1 \text{ cumple (1.15.2))} \\ &= 2^{\frac{1}{\sqrt{a_n}}} e_{i+1}. \end{aligned}$$

Por tanto $\|Te_i\| = 2^{\frac{1}{\sqrt{a_n}}} < 1 + \frac{1}{2}\eta$ si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido.

Caso 4.2.3. Supongamos que $i \in S_3$ entonces,

$$\begin{aligned} Te_i &= T\big(2^{\frac{h-i}{\sqrt{b_n}}} \cdot w_i\big) \\ &= 2^{\frac{h-i}{\sqrt{b_n}}} \cdot w_{i+1} \\ &= 2^{\frac{1}{\sqrt{b_n}}} e_{i+1} \end{aligned}$$

puesto que $i+1$ cumple (1.15.3). Luego $\|Te_i\| = 2^{\frac{1}{\sqrt{b_n}}} < 1 + \frac{1}{2}\eta$ si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido.

Caso 4.2.4. Supongamos que $i \in S_4$ entonces,

$$\begin{aligned} Te_i &= T(w_i - b_n w_{i-b_n}) \\ &= w_{i+1} - b_n w_{i+1-b_n} \\ &= e_{i+1} \end{aligned}$$

puesto que $i+1$ cumple (1.15.4). Evidentemente $\|Te_i\| = 1 < 1 + \frac{1}{2}\eta$.

Caso 4.2.5. Supongamos que $i \in S_5$ entonces,

$$\begin{aligned} Te_i &= T\big(2^{1-|p|} \cdot c_n(w_i - \bar{p}_{d,\nu_n}(T)w_{i-c_n^d}\big) \\ &= 2^{1-|p|} \cdot c_n(w_{i+1} - \bar{p}_{d,\nu_n}(T)w_{i-c_n^d+1}) \\ &= e_{i+1} \end{aligned}$$

puesto que $i+1$ verifica (1.15.5); obviamente $\|Te_i\| = 1 < 1 + \frac{1}{2}\eta$.

Caso 4.2.6. Supongamos que $i \in S_6$ entonces,

$$\begin{aligned} Te_i &= 2^{(h-i)/c_n^{J(p)-1/2}} Tw_i \\ &= 2^{1/c_n^{J(p)-1/2}} e_{i+1} \end{aligned}$$

puesto que $i+1$ verifica (1.15.6). Además se cumple que $J(p) \geq 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \|Te_i\| &= 2^{1/c_n^{J(p)-1/2}} \\ &\leq 2^{1/\sqrt{c_n}} \\ &< 1 + \tfrac{1}{2}\eta \end{aligned}$$

si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido. Luego $T \circ \pi_S$ es un operador *desplazamiento* con peso que aplica e_i en $\delta_i e_{i+1}$ con $\max|\delta_i| = 2^{\frac{1}{\sqrt{a_1}}} < 1 + \frac{1}{2}\eta$, si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido. En consecuencia,

$$\|T \circ \pi_S\| \leq 1 + \tfrac{1}{2}\eta.$$

Por otro lado, si consideramos $i \in R$ la expresión del operador $T \circ \pi_R$ actuando sobre los vectores básicos de ℓ^1 es más elaborada. Hemos estudiado en los casos anteriores que si i cumple la propiedad (1.15.k) ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) entonces $i+1$ también cumple la misma propiedad. Los casos que estudiaremos ahora son aquellos en los que i cumple la propiedad (1.15.k) pero $i+1$ cumple otra distinta.

Caso 4.2.7. Supongamos que $i \in R_1$. Estudiaremos los casos $r < n$ y $r = n$ debido a la distinción realizada en (1.15.2). En primer lugar si tomamos $r < n$,

$$\begin{aligned} Te_i &= T\big(a_{n-r}(w_i - w_{i-ra_n})\big) \\ &= a_{n-r}(w_{i+1} - w_{i+1-ra_n}) \\ &= a_{n-r}\big(2^{\frac{i+1-h}{\sqrt{a_n}}} e_{i+1} - w_{i+1-ra_n}\big) && \text{(de (1.15.2))} \\ &= a_{n-r}\big(2^{\frac{\xi_{n-r}+1-\frac{1}{2}a_n}{\sqrt{a_n}}} e_{i+1} - w_{\xi_{n-r}+1}\big), && \text{(puesto que } h = (r+\tfrac{1}{2})a_n \text{ y } \xi_{n-r} = i - ra_n). \end{aligned}$$

Veamos el caso $r = n$; como $i = na_n = \mu_n$ entonces $i + 1 = na_n + 1$, que cumple (1.15.3) y $h = \frac{1}{2}b_n$. Luego

$$w_{i+1} = 2^{\frac{i+1-h}{\sqrt{b_n}}} \cdot e_{i+1} = 2^{\frac{na_n+1-\frac{1}{2}b_n}{\sqrt{b_n}}} \cdot e_{i+1}.$$

Por tanto,

$$Te_i = a_{n-r}\big(\varepsilon_1 e_{i+1} - w_{i+1-ra_n}\big) \quad \text{donde} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_1(n,r) = \begin{cases} 2^{\frac{\xi_{n-r}+1-\frac{1}{2}a_n}{\sqrt{a}_n}} & r < n, \\ 2^{\frac{na_n+1-\frac{1}{2}b_n}{\sqrt{b}_n}} & r = n. \end{cases}$$

Nos queda poner w_{i+1-ra_n} en función de e_{i+1-ra_n}. Puesto que $i \in R_1$ se tiene que $i - ra_n + 1 = \xi_{n-r} + 1$, $1 \leq r \leq n$. Luego $\xi_{n-r} + 1 \in \bigcup_{k=1}^{n}(\xi_{k-1}, a_k)$ por (1.15.2). En particular, si $N \geq 1$, $k \in (\xi_{N-1}, a_N)$ entonces $e_k = 2^{(h-k)/\sqrt{a}_N} w_k$, $h = \frac{1}{2}a_N$.
En nuestro caso $k = \xi_{n-r} + 1$, así que si $N = n - r + 1$ entonces $\xi_{N-1} = \xi_{n-r}$ y, por tanto, $i \in (\xi_{n-r}, a_{n-r+1})$. Luego

$$w_{\xi_{n-r}+1} = 2^{\frac{\xi_{n-r}+1-h}{\sqrt{a}_{n-r+1}}} e_{\xi_{n-r}+1} \qquad \text{con } h = \tfrac{1}{2}a_{n-r+1}.$$

Así $Te_i = a_{n-r}\big(\varepsilon_1 e_{i+1} - \varepsilon_2 e_{\xi_{n-r}+1}\big)$ donde

$$\varepsilon_2 = 2^{\frac{\xi_{n-r}+1-\frac{1}{2}a_{n-r+1}}{\sqrt{a}_{n-r+1}}}$$

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 2^{\frac{\xi_{n-r}+1-\frac{1}{2}a_n}{\sqrt{a}_n}} & r < n, \\ 2^{\frac{na_n+1-\frac{1}{2}b_n}{\sqrt{b}_n}} & r = n. \end{cases}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \|Te_i\| &\leq a_{n-r}\varepsilon_2\big(\|e_{i+1}\| + \|e_{\xi_{n-r}+1}\|\big) \\ &= a_{n-r}2 \cdot \varepsilon_2 \\ &< \tfrac{1}{2}\eta \end{aligned}$$

si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido.

Caso 4.2.8. Supongamos que $i \in R_2$. De (1.15.2), $1 \leq r < n$,

$$\begin{aligned} Te_i &= T\big(2^{\frac{h-i}{\sqrt{a}_n}} w_i\big) \\ &= 2^{\frac{h-i}{\sqrt{a}_n}} w_{i+1} \\ &= 2^{\frac{h-i}{\sqrt{a}_n}} w_{ra_n} \\ &= 2^{\frac{1-a_n/2}{\sqrt{a}_n}} w_{ra_n}. \end{aligned}$$

Como $i = ra_n - 1$ entonces $i+1$ cumple (1.15.1), por tanto

$$\begin{aligned} e_{i+1} &= a_{n-r}\big(w_{i+1} - w_{i+1-ra_n}\big) \\ &= a_{n-r}\big(w_{i+1} - w_0\big) \\ &= a_{n-r}\big(w_{ra_n} - w_0\big). \end{aligned}$$

Como $w_0 = e_0$, entonces

$$w_{i+1} = w_{ra_n} = e_0 + \frac{1}{a_{n-r}} e_{i+1}. \tag{4.2.0}$$

Por tanto, $\|w_{ra_n}\| \leq 2$ y así

$$\|Te_i\| \leq 2 \cdot 2^{\frac{1-a_n/2}{\sqrt{a_n}}} < \tfrac{1}{2}\eta$$

si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido.

Caso 4.2.9. Supongamos que $i \in R_3$ con $1 \leq r \leq n$. Por (1.15.3)

$$\begin{aligned} Te_i &= T\big(2^{\frac{h-i}{\sqrt{b_n}}} w_i\big) \\ &= 2^{\frac{h-i}{\sqrt{b_n}}} w_{i+1} \qquad \text{con } h = (r + \tfrac{1}{2})b_n. \end{aligned}$$

En este caso, $i+1$ $(= r(a_n + b_n))$ cumple (1.15.4) y por tanto

$$\begin{aligned} Te_i &= 2^{-\frac{ra_n + b_n/2 - 1}{\sqrt{b_n}}} \cdot w_{r(a_n+b_n)} \\ &= \tilde{\varepsilon}_1 \cdot w_{r(a_n+b_n)}. \end{aligned}$$

Si escribimos $k = i+1$, de (1.15.4), se tiene que $e_k = w_k - b_n w_{k-b_n}$. Luego,

$$\begin{aligned} w_k &= e_{i+1} + b_n w_{k-b_n} \\ &= e_k + b_n e_{k-b_n} + b_n^2 w_{k-2b_n} \\ &= e_k + b_n e_{k-b_n} + b_n^2 w_{k-2b_n} + b_n^3 w_{k-3b_n} \\ &= \dots \\ &= \sum_{j=0}^{r-1} b_n^j e_{k-jb_n} + b_n^r w_{k-rb_n}. \end{aligned}$$

Puesto que $k - rb_n = ra_n$ por (4.2.0), se concluye que

$$w_{i+1} = \sum_{j=0}^{r-1} b_n^j e_{k-jb_n} + b_n^r \big(e_0 + \frac{1}{a_{n-r}} e_{ra_n}\big).$$

Obsérvese que si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido entonces,

$$\tilde{\varepsilon}_1 \cdot \left(\sum_{j=0}^{r-1} b_n^j + b_n^r \left(1 + \frac{1}{a_{n-r}} \right) \right) < \tfrac{1}{2}\eta.$$

Caso 4.2.10. Supongamos que $i \in R_4$. Puesto que $i \in R_4$ entonces, por (1.15.4)

$$\begin{aligned} Te_i &= T\big(w_i - b_n w_{i-b_n}\big) \\ &= w_{i+1} - b_n w_{i+1-b_n} \end{aligned}$$

De nuevo distinguimos los casos $r < n$ y $r = n$. Para el caso $r < n$, como $i = na_n + rb_n$ entonces $i + 1 \in S_3$ por (1.15.3); así que

$$e_{i+1} = 2^{\frac{h-i-1}{\sqrt{b_n}}} w_{i+1} \qquad\qquad h = (r + \tfrac{1}{2})b_n.$$

Luego

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= 2^{\frac{i+1-rb_n-b_n/2}{\sqrt{b_n}}} e_{i+1} \\ &= 2^{\frac{na_n+1-b_n/2}{\sqrt{b_n}}} e_{i+1}. \end{aligned}$$

Pero si $r = n$ entonces $i = n(a_n + b_n) = \nu_n$, y por (1.15.6), $i + 1 = \nu_n + 1 \in (\nu_n, c_n)$, $h = \frac{c_n}{2}$ y $J(p) = J(\mathbf{0}) = 1$. Por tanto

$$w_{i+1} = 2^{\frac{\nu_n+1-c_n/2}{\sqrt{c_n}}} e_{i+1}.$$

Puesto que $i + 1 - b_n$ $(= na_n + 1 + (r-1)b_n,\ 1 \le r \le n)$ cumple (1.15.3), entonces

$$\begin{aligned} w_{i+1-b_n} &= 2^{\frac{na_n+1+(r-1)b_n-(r-1/2)b_n}{\sqrt{b_n}}} \cdot e_{i+1-b_n} \\ &= 2^{\frac{na_n+1-b_n/2}{\sqrt{b_n}}} e_{i+1-b_n}. \end{aligned}$$

En definitiva,

$$\|Te_i\| = \|\varepsilon_1 e_{i+1} - b_n \varepsilon_2 e_{i+1-b_n}\| \quad \text{donde} \quad \varepsilon_2 = 2^{\frac{na_n+1-b_n/2}{\sqrt{b_n}}}, \quad \varepsilon_1 = \begin{cases} \varepsilon_2 & r < n, \\ 2^{\frac{\nu_n+1-c_n/2}{\sqrt{c_n}}} & r = n. \end{cases}$$

De este modo tenemos que $\|Te_i\| < \frac{1}{2}\eta$ si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido.

Caso 4.2.11. Supongamos que $i \in R_5$. Entonces $i = p(c_n) + \nu_n$ para algún $p \in \Lambda_n$. Por tanto,

$$\begin{aligned} Te_i &= 2^{1-|p|} c_n T\big(w_i - \bar{p}_{d,\nu_n}(T) w_{i-c_n^d}\big) \\ &= 2^{1-|p|} c_n \big(w_{p(c_n)+\nu_n+1} - \bar{p}_{d,\nu_n}(T) w_{p(c_n)+\nu_n+1-c_n^d}\big) \\ &= 2^{1-|p|} c_n \left(w_{p(c_n)+\nu_n+1} - \sum_{k=1}^{\nu_n} \alpha_k w_{1+p(c_n)+\nu_n-c_n^d+k} \right) \end{aligned}$$

donde $\bar{p}_{d,\nu_n}(t) = \sum_{k=1}^{\nu_n} \alpha_k t^k$ y d es el grado de p. Como $|\bar{p}_{d,\nu_n}| \leq 1$, entonces

$$\|Te_i\| \leq c_n \left(\|w_{p(c_n)+\nu_n+1}\| + \max_{0\leq k\leq \nu_n} \|w_{1+p(c_n)+\nu_n-c_n^d+k}\| \right). \tag{4.2.1}$$

Ahora, aplicando (1.15), (1.12) se tiene que para todo $p \in \Lambda_n \cup \{0\}$,

$$\begin{aligned} \|w_{p(c_n)+\nu_n+1}\| &= \begin{cases} 2^{(1-\xi_n-a_{n+1}/2)/\sqrt{a}_{n+1}}, & p = \hat{p}_n, \\ 2^{(1+\nu_n-(p^+(c_n)-p(c_n))/2)/c_n^{J(p)-1/2}}, & p < \hat{p}_n, \end{cases} \\ &\leq 2^{-\sqrt{c_n}/3} \qquad \text{(por (1.12.2))} \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido. De forma similar, si tomamos el polinomio $q(t) = p(t)-t^d \in \Lambda_n \cup \{0\}$ por (1.15.6), obtenemos e_r para cada $r \in (q(c_n)+\nu_n, q^+(c_n)) \supseteq (1+q(c_n)+\nu_n, 1+q(c_n)+2\nu_n)$ $(q^+(c_n) - q(c_n) \geq c_n$ si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido). Por tanto, para cada $0 \leq k \leq \nu_n$

$$\begin{aligned} \|w_{1+p(c_n)+\nu_n-c_n^d+k}\| &= 2^{(1+k+\nu_n+(q(c_n)-q^+(c_n))/2)/c_n^{J(q)-1/2}} \\ &\leq 2^{-\sqrt{c}_n/3} \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido. Luego aplicando (4.2.1),(4.2.2) y (4.2.3) se tiene que

$$\|Te_i\| \leq 2c_n \cdot 2^{-\sqrt{c}_n/3} < \tfrac{1}{2}\eta \tag{4.2.4}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\boldsymbol{d}$ creciendo suficientemente rápido.

Caso 4.2.12. Supongamos que $i \in R_6$ entonces $i = p^+(c_n) - 1$ para algún $p \in \Lambda_n$. Por (1.15.6), (1.12.2),

$$Te_i = 2^{\frac{1+(p(c_n)-p^+(c_n))/2}{c_n^{J(p)-1/2}}} \cdot w_{p^+(c_n)},$$

y

$$\begin{aligned} \|Te_i\| &= 2^{(1+(p(c_n)-p^+(c_n))/2)/(c_n^{J-1/2})} \cdot \|w_{p^+(c_n)}\| \qquad (J = J(p)) \\ &\leq 2^{(1-\frac{3}{4}c_n^J)/(c_n^{J-1/2})} \cdot \|w_{p^+(c_n)}\|. \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Ahora daremos una cota superior de $\max_{\Lambda_n} \{\|w_{p(c_n)}\|\}$. Para ello generalizaremos ligeramente la estimación que se pretende obtener. Denotamos

$$L_r = \max \{\|w_j\| : j \in G_5^{(n)},\ p \in \Lambda_n \cup \{0\},\ |p| = r\}. \tag{4.2.6}$$

De (1.17.2) se tiene que

$$\begin{aligned} L_0 &= \max \{\|w_j\| : j \in G_5^{(n)},\ p \in \Lambda_n \cup \{0\},\ |p| = 0\} \\ &= \max \{\|w_j\| : j \in [0, \nu_n]\} \\ &\leq M_2(n, b_n). \end{aligned}$$

Por otro lado si gr(p)= d, $|p| = r > 0$, entonces para todo $j \in G_5^{(n)}$, (1.15.5) da que

$$\begin{aligned} w_j &= c_n^{-1} \cdot 2^{r-1} e_j + \bar{p}_{d,\nu_n}(T) w_{j-c_n^d} \\ \|w_j\| &\leq c_n^{-1} \cdot 2^{r-1} + \|\bar{p}_{d,\nu_n}(T) w_{j-c_n^d}\|. \end{aligned}$$

Puesto que $|\bar{p}_{d,\nu_n}| \leq 1$, gr($\bar{p}_{d,\nu_n}$)$\leq \nu_n$ y $j - c_n^d \in [p(c_n) - c_n^d, p(c_n) - c_n^d + \nu_n]$, entonces

$$\bar{p}_{d,\nu_n}(T) w_{j-c_n^d} \in \Delta\big\{w_k : k \in [q(c_n), q(c_n) + 2\nu_n]\big\}$$

donde Δ denota la envolvente absolutamente convexa y $q(t) = p(t) - t^d$, $|q| = r - 1$. Así que para todo $j \in G_5^{(n)}$

$$\|w_j\| \leq c_n^{-1} \cdot 2^{r-1} + \max\Bigg(L_{r-1}, \max\big\{\|w_k\| : k \in \big(q(c_n) + \nu_n, q(c_n) + 2\nu_n\big]\big\}\Bigg).$$

Nótese que L_{r-1} cubre los casos $k \in [q(c_n), q(c_n) + \nu_n]$. Por (1.15.6), el último máximo de la parte derecha de la igualdad anterior es menor que 1 si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido; por tanto,

$$L_r \leq c_n^{-1} \cdot 2^{r-1} + \max\big(L_{r-1}, 1\big).$$

Hemos visto que $L_0 \leq M_2(n, b_n)$; por otro lado

$$\begin{aligned} L_1 &\leq c_n^{-1} \cdot 2^0 + \max\big(L_0, 1\big) \\ &\leq c_n^{-1} + M_2(n, b_n), \\ L_2 &\leq c_n^{-1} \cdot 2^1 + \max\big(L_1, 1\big) \\ &\leq c_n^{-1} \cdot 2 + c_n^{-1} \cdot 2^0 + M_2(n, b_n). \\ &\vdots \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} L_r &\leq c_n^{-1}\Bigg(\sum_{k=0}^{r-1} 2^k\Bigg) + M_2(n, b_n) \\ &\leq M_2(n, b_n)\big(1 + 2^r c_n^{-1}\big) && \text{(si } \boldsymbol{d} \text{ crece suficientemente rápido)} \\ &\leq M_2(n, b_n)\big(1 + 2^{h_n \cdot M(\nu_n)} c_n^{-1}\big) && \text{(ya que } r = |p| \leq |p|_\infty \cdot \mathrm{gr}(p) \leq h_n \cdot M(\nu_n)) \\ &\leq M_2(n, b_n)\big(1 + 2^{(\log_2 c_n^2 + 1) \cdot M(\nu_n)} c_n^{-1}\big) && \text{(ya que } h_n = E(2\log_2 c_n) \leq \log_2 c_n^2 + 1) \\ &= M_2(n, b_n)\big(1 + 2^{M(\nu_n) \cdot \log_2(c_n^2)} \cdot 2^{M(\nu_n)} \cdot c_n^{-1}\big) \\ &= M_2(n, b_n)\big(1 + c_n^{2M(\nu_n)} \cdot 2^{M(\nu_n)} \cdot c_n^{-1}\big) \\ &\leq M_2(n, b_n)\Bigg(1 + \frac{c_n^{2M(\nu_n)}}{2}\Bigg) && \text{(si } \boldsymbol{d} \text{ crece suficientemente rápido)} \\ &\leq M_2(n, b_n) c_n^{2M(\nu_n)}. && (4.2.7) \end{aligned}$$

Por tanto de (4.2.5),(4.2.6) y (4.2.7) se tiene que

$$\begin{aligned}\|Te_i\| &\leq 2^{(1-\frac{3}{4}c_n^J)/c_n^{J-1/2}}\|w_{p^+(c_n)}\| \qquad (J = J(p))\\ &\leq 2^{(1-\frac{3}{4}c_n^J)/c_n^{J-1/2}}M_2(n,b_n)c_n^{2M(\nu_n)}\\ &< \tfrac{1}{2}\eta\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\boldsymbol{d}$ creciendo suficientemente rápido.

Puesto que los casos estudiados son todos los posibles, concluimos que si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido y $\eta > 0$ entonces $\|T \circ \pi_R\| \leq \frac{1}{2}\eta$ y $\|T \circ \pi_S\| \leq 1 + \frac{1}{2}\eta$. Por tanto

$$T = T_S + T_R = (\text{Operador } \textit{desplazamiento derecha} \text{ con peso}) + (\text{Operador } \textit{nuclear}).$$

Obsérvese que la perturbación del operador $T \circ \pi_R$ posee norma nuclear pequeña. Escribimos $T \circ \pi_R$ como una suma infinita de operadores de rango finito $\sum_{i=0}^{\infty} y_i^* \otimes e_i$, en la topología fuerte de operadores, donde el tensor elemental $y_i^* \otimes e_i$ actúa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(y_i^* \otimes e_i)(e_k) &= y_i^*(e_k)e_i\\ &= e_i^*(T \circ \pi_R(e_k))e_i.\end{aligned}$$

Además, para cada $i \geq 0$ se tiene que

$$\|y_i^*\| = \sup_{j\geq 0}\left|e_i^*(T \circ \pi_R(e_j))\right| = \beta_i$$

donde $e_i^* \in \ell^\infty$ y cada valor β_i se deduce de los casos estudiados anteriormente, $i \in R$. Si consideramos el operador $T \circ \pi_R$ como una matriz infinita $(t_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$ y escribimos $\big(T \circ \pi_R\big)_{(i)}$ para la i-ésima fila de esta matriz, entonces $\big(T \circ \pi_R x\big)_i = \langle \big(T \circ \pi_R\big)_{(i)}, x\rangle$ con $x \in \ell^1$ y

$$T \circ \pi_R x = \sum_{i=0}^{\infty}\langle \big(T \circ \pi_R\big)_{(i)}, x\rangle e_i.$$

Así, una representación nuclear del operador $T \circ \pi_R$ es $\sum_{i=0}^{\infty}\big(T \circ \pi_R\big)_{(i)} \otimes e_i$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\|T \circ \pi_R\| \leq \|T \circ \pi_R\|_{\text{nuc}} &= \sum_{i=0}^{\infty}\|\big(T \circ \pi_R\big)_{(i)}\| \cdot \|e_i\|\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\|\big(T \circ \pi_R\big)_{(i)}\|\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\beta_i\\ &< \frac{1}{2}\eta,\end{aligned}$$

si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido. Por tanto $\|T\| \leq (1 + \frac{1}{2}\eta) + \frac{1}{2}\eta = 1 + \eta$ como se quería probar. $\square$

5. Comportamiento de ciertas potencias de T

En esta sección probaremos que si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ y $k = k(n) \in \mathbb{N}$ el operador iterado $T^{c_n^k}$ está acotado en $\ell^1 \setminus F_{\xi_n}$.

LEMA 5. *Sea $\eta > 0$. Si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq M(\nu_n)$,*

$$\|T^{c_n^k} \circ (I - R_n^\circ)\| \leq 1 + \eta. \tag{5.0.1}$$

Demostración. Para probar (5.0.1) veamos que para todo n, i,

$$\|T^{c_n^k} \circ (I - R_n^\circ) e_i\| \leq 1 + \eta.$$

Como en el Lema 4, consideraremos algunos casos.

Caso 0. $0 \leq j \leq \xi_n$. Entonces $(I - R_n^\circ)e_j = 0$ y por tanto $\|T^{c_n^k} \circ (I - R_n^\circ)e_j\| = 0$.

Caso 1. Para algún $m > n$, $1 \leq r \leq m$, $j \in G_1^{(r,m)}$. Consideraremos dos subcasos: $m - n < r$ y $m - n \geq r$.

Si $m - n < r$ entonces $R_n^\circ(e_j) = -a_{m-r} w_{j - r a_m}$ por (2.2). Luego $(I - R_n^\circ)e_j = a_{m-r} w_j$ y así $T^{c_n^k} \circ (I - R_n^\circ)e_j = a_{m-r} w_{j + c_n^k}$. Además $j + c_n^k \geq r a_m + c_n^k > r a_m + \xi_{m-r}$ si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido (pues $m - r < n$). Así, para algún $0 \leq \alpha < c_n^k$ podremos escribir

$$\|w_{j + c_n^k}\| = \|T^\alpha (w_{r a_m + \xi_{m-r} + 1})\| \leq 2^\alpha \cdot \varepsilon_1$$

donde, como en el caso 4.2.7 del Lema 4,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(m, r) = \begin{cases} 2^{\frac{\xi_{m-r} + 1 - \frac{1}{2} a_m}{\sqrt{a_m}}} & r < m, \\ 2^{\frac{m a_m + 1 - \frac{1}{2} b_m}{\sqrt{b_m}}} & r = m. \end{cases} \tag{5.1.1}$$

Por tanto, $\varepsilon_1 < 2^{-\frac{\sqrt{a_m}}{4}}$ para todo $1 \leq r \leq m$ si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido. Así

$$\begin{aligned} \|T^{c_n^k} \circ (I - R_n^\circ)e_j\| &\leq a_{m-r} \cdot 2^{c_n^k} \cdot 2^{-\frac{\sqrt{a_m}}{4}} \\ &< \eta \end{aligned}$$

con $k \leq M(\nu_n)$ para todo $m > n$ y $\boldsymbol{d}$ creciendo suficientemente rápido.

Si $m - n \geq r$ entonces por (2.2), $R_n^\circ e_j = 0$. Luego

$$\begin{aligned} T^{c_n^k} \circ (I - R_n^\circ)e_j &= T^{c_n^k} e_j \\ &= a_{m-r}(w_{j + c_n^k} - w_{j - r a_m + c_n^k}). \end{aligned}$$

Por otro lado, si $j + c_n^k \leq ra_m + \xi_{m-r}$, entonces la parte de la derecha de la última igualdad es $e_{j+c_n^k}$ y si $j + c_n^k > ra_m + \xi_{m-r}$ entonces tenemos que

$$a_{m-r}T^\alpha(w_{ra_m+\xi_{m-r}+1} - w_{\xi_{m-r}+1}) = a_{m-r}T^\alpha(\varepsilon_1 e_{ra_m+\xi_{m-r}+1} - \varepsilon_2 e_{\xi_{m-r}+1})$$

para algún $\alpha \in [0, c_n^k)$ donde, como en el caso 4.2.7 del Lema 4 y (5.1.1),

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= 2^{\frac{\xi_{m-r}+1-\frac{1}{2}a_m}{\sqrt{a}_m}} \\ &< 2^{\frac{-\sqrt{a_m}}{4}}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= 2^{\frac{\xi_{m-r}+1-\frac{1}{2}a_{m-r+1}}{\sqrt{a}_{m-r+1}}} \\ &< 2^{\frac{-\sqrt{a_{m-r+1}}}{4}}\end{aligned}$$

con $r < m$ y si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido. Así,

$$\begin{aligned}\|T^{c_n^k}e_j\| &\leq a_{m-r}\cdot 2^\alpha(\varepsilon_1+\varepsilon_2) \\ &\leq a_{m-r}\cdot 2^{c_n^M}\big(2^{\frac{-\sqrt{a_{m-r+1}}}{4}} + 2^{\frac{-\sqrt{a_m}}{4}}\big) \qquad (M = M(\nu_n)) \\ &< \eta\end{aligned}$$

para todo m, r tales que $m - r \geq n$ y $\boldsymbol{d}$ creciendo suficientemente rápido. Luego el Caso 1 queda completo y, por tanto, $\|T^{c_n^k} \circ (I - R_n^\circ)e_j\| < \eta$.

Caso 2. Si para algún $m > n$ se tiene que i cumple (1.15.2), es decir, $i \in (ra_m+\xi_{m-r}, (r+1)a_m)$ (respectivamente, $i \in (\xi_{m-1}, a_m)$) con $1 \leq r < m$ entonces, $R_n^\circ e_i = 0$ por (2.2), y por (1.15.2),

$$e_i = 2^{\frac{h-i}{\sqrt{a_m}}}\cdot w_i$$

donde $h = (r+\frac{1}{2})a_m$ (respectivamente, $h = \frac{1}{2}a_m$). Así que

$$\begin{aligned}T^{c_n^k}\circ(I-R_n^\circ)e_i &= T^{c_n^k}e_i \\ &= 2^{\frac{h-i}{\sqrt{a_m}}}\cdot w_{i+c_n^k}. \qquad (5.1.2)\end{aligned}$$

Si $i + c_n^k < (r+1)a_m$ (respectivamente, $i + c_n^k < a_m$) entonces (5.1.2) es $2^{\frac{c_n^k}{\sqrt{a_m}}}\cdot e_{i+c_n^k}$. Por tanto,

$$\|T^{c_n^k}\circ(I-R_n^\circ)e_i\| = 2^{\frac{c_n^k}{\sqrt{a_m}}} < 1+\eta$$

para todo $m > n$, $k \leq M(\nu_n)$ si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido.

Por otro lado, si $i + c_n^k \geq (r+1)a_m$ (resp., $i + c_n^k \geq a_m$), entonces (5.1.2) es $2^{\frac{h-i}{\sqrt{a_m}}} T^\alpha w_{(r+1)a_m}$ para algún $\alpha \in [0, c_n^k)$. Resulta inmediato de (1.15.0), (1.15.1) que $\|w_{(r+1)a_m}\| \leq 2$. Luego

$$\begin{aligned}\|T^{c_n^k} \circ (I - R_n^\circ)e_i\| &\leq 2^{\frac{h-i}{\sqrt{a_m}}} \cdot \|T\|^\alpha \cdot 2 \\ &\leq 2^{\frac{c_n^k - \frac{a_m}{2}}{\sqrt{a_m}}} \cdot 2^{c_n^M} \cdot 2 \qquad\qquad (M = M(\nu_n))\end{aligned}$$

puesto que $h = (r + \frac{1}{2})a_m$ (respectivamente $a_m/2$), $i + c_n^k \geq (r+1)a_m$ (respectivamente a_m), y $\alpha \leq c_n^k \leq c_n^{M(\nu_n)}$. Si denotamos $M = M(\nu_n)$ y $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido, entonces

$$\|T^{c_n^k} \circ (I - R_n^\circ)e_i\| \leq 2^{1 + c_n^M(1 + \frac{1}{\sqrt{a_m}})} \cdot 2^{-\frac{\sqrt{a_m}}{2}} < \eta$$

para todo $m > n$.

Caso 3. Si para algún $m > n$, $i \in G_3^{(r,m)}$, es decir, $i \in \big(ma_m + rb_m, (r+1)(a_m + b_m)\big)$ con $0 \leq r < m$, entonces $R_n^\circ e_i = 0$. Por (1.15.3) se tiene que

$$\begin{aligned}T^{c_n^k} e_i &= T^{c_n^k}\big(2^{\frac{h-i}{\sqrt{b_m}}} \cdot w_i\big) \qquad\qquad \big(h = (r + \tfrac{1}{2})b_m\big) \\ &= 2^{\frac{h-i}{\sqrt{b_m}}} \cdot w_{i + c_n^k}.\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Si $i + c_n^k < (r+1)(a_m + b_m)$ entonces (5.1.3) es $2^{c_n^k/\sqrt{b_m}} e_{i + c_n^k}$, un vector de norma $2^{c_n^k/\sqrt{b_m}} < 1 + \eta$ para todo $n < m$ si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido.

Si $i + c_n^k \geq (r+1)(a_m + b_m)$ entonces para algún $\alpha \in [0, c_n^k)$, (5.1.3) es

$$2^{\frac{h-i}{\sqrt{b_m}}} T^\alpha \big(w_{(r+1)(a_m + b_m)}\big).$$

Por tanto, usando (1.15.4) se tiene que

$$
\begin{aligned}
\|T^{c_n^k} e_i\| &\le 2^{\frac{h-i}{\sqrt{b_m}}+\alpha} \cdot \|w_{(r+1)(a_m+b_m)}\| \\
&= 2^{\frac{h-i}{\sqrt{b_m}}+\alpha} \cdot \left\| \left(\sum_{j=0}^{r} b_m^j e_{(r+1)a_m+(r+1-j)b_m} \right) + b_m^{r+1} \left(e_0 + \tfrac{1}{a_{m-r-1}} e_{(r+1)a_m} \right) \right\| \\
&\le 2^{\frac{h-i}{\sqrt{b_m}}+\alpha} (m+2) b_m^m \\
&\le 2^{\frac{c_n^k - b_m/2}{\sqrt{b_m}}+M} (m+2) b_m^m \qquad (M = M(\nu_n)) \\
&\qquad\qquad (\text{puesto que } h = (r+\tfrac{1}{2}) b_m \text{ e } i + c_n^k \ge (r+1) b_m) \\
&\le 2^{-\frac{\sqrt{b_m}}{2}} \cdot 2^{\frac{c_n^M}{\sqrt{b_m}}} \cdot 2^M \cdot (m+2) b_m^m \\
&\le 2^{-\frac{\sqrt{b_m}}{2}} \cdot 2^{c_n^M} \cdot 2^M \cdot (m+2) b_m^m \\
&\le 2^{-\frac{\sqrt{b_m}}{2}} \cdot 2^{2c_n^M} \cdot (m+2) b_m^m \\
&< \eta
\end{aligned}
$$

para todo $n < m$ y $\boldsymbol{d}$ creciendo suficientemente rápido.

Caso 4. Si para algún $m > n$ se tiene que $i \in G_4^{(r,m)}$ entonces $R_m^\circ e_i = 0$ por (2.2). Así que consideramos la norma del vector

$$T^{c_n^k} e_i = w_{i+c_n^k} - b_m w_{i+c_n^k - b_m}.$$

Si $i + c_n^k \le m a_m + r b_m$ entonces, por (1.15.4), la parte derecha de la anterior igualdad es $e_{i+c_n^k}$, que es de norma 1.

Si $i + c_n^k > m a_m + r b_m$ entonces para algún $\alpha \in [0, c_n^k)$

$$
\begin{aligned}
T^{c_n^k} e_i &= T^\alpha (w_{m a_m + r b_m + 1} - b_m w_{m a_m + (r-1) b_m + 1}) \\
&= T^\alpha (\varepsilon_1 e_{m a_m + r b_m + 1} - b_m \varepsilon_2 e_{m a_m + (r-1) b_m + 1})
\end{aligned}
$$

donde, por (1.15.3),

$$
\varepsilon_2 = 2^{\frac{m a_m + 1 - \frac{b_m}{2}}{\sqrt{b_m}}} \qquad \text{y} \qquad \varepsilon_1 = \begin{cases} 2^{\frac{\nu_m + 1 - \frac{c_m}{2}}{\sqrt{c_m}}}, & r = m, \\ \varepsilon_2, & r < m. \end{cases}
$$

En cualquier caso tenemos que $\max\{\varepsilon_1, \ \varepsilon_2\} \le 2^{-\frac{\sqrt{b_m}}{4}}$, si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido. Así que

$$
\begin{aligned}
\|T^{c_n^k} e_i\| &\le \|T\|^\alpha (1 + b_m) \cdot 2^{-\frac{\sqrt{b_m}}{4}} \\
&\le 2^{c_n^M} (1 + b_m) \cdot 2^{-\frac{\sqrt{b_m}}{4}} \qquad (M = M(\nu_n)) \\
&< \eta
\end{aligned}
$$

para todo $m > n$ si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido.

Estudiamos ahora los casos en los que $i \in G_5^{(m)} \bigcup G_6^{(m)}$ con $m > n$.

Caso 5. Si para algún $m > n$ con $p \in \Lambda_m$ se tiene que $i \in G_5^{(m)}$ entonces, $R_n^\circ e_i = 0$. Para el caso en que $i + c_n^k \leq p(c_m) + \nu_m$ se tiene que $T^{c_n^k} e_i = e_{i+c_n^k}$.

Por otro lado, si $i + c_n^k > p(c_m) + \nu_m$ entonces para algún $\alpha \in [0, c_n^k)$,

$$T^{c_n^k} e_i = T^\alpha \cdot T e_{p(c_m)+\nu_m}.$$

Ahora bién, de (4.2.4)

$$\|T e_{p(c_m)+\nu_m}\| \leq 2c_m \cdot 2^{-\frac{\sqrt{c_m}}{3}}$$

y así,

$$\begin{aligned} \|T^{c_n^k} e_i\| &\leq 2^{1+c_n^M} c_m \cdot 2^{-\frac{\sqrt{c_m}}{3}} \qquad\qquad (M = M(\nu_n)) \\ &< \eta \end{aligned}$$

para todo $m > n$ y $\boldsymbol{d}$ creciendo suficientemente rápido.

Caso 6. Si para algún $m > n$, $p \in \Lambda_n \cup \{0\}$ tal que $p < \hat{p}$ con $i \in G_6^{(m)}$, entonces $R_n^\circ(e_i) = 0$ por (2.2) y por (1.15.6),

$$T^{c_n^k} e_i = 2^{(h-i)/(c_m^{J-1/2})} \cdot w_{i+c_n^k} \qquad\qquad (J = J(p))$$

donde $h = (p(c_m) + p^+(c_m))/2$. Luego si $i + c_n^k < p^+(c_m)$, entonces

$$\begin{aligned} T^{c_n^k} e_i &= 2^{(h-i)/(c_m^{J-1/2})} \cdot \left(2^{(i+c_n^k-h)/(c_m^{J-1/2})} e_{i+c_n^k}\right) \\ &= 2^{c_n^k/(c_m^{J-1/2})} e_{i+c_n^k}, \end{aligned}$$

y por tanto, $\|T^{c_n^k} e_i\| < 1 + \eta$ si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido.

Por otro lado si $i + c_n^k \geq p^+(c_m)$, entonces para algún $\alpha \in [0, c_n^k)$

$$T^{c_n^k} e_i = T^\alpha (2^{(h-i)/(c_m^{J-1/2})} \cdot w_{p^+(c_m)}).$$

Así,

$$\begin{aligned} \|T^{c_n^k} e_i\| &\leq 2^{\alpha+(h-i)/(c_m^{J-1/2})} \|w_{p^+(c_m)}\| \\ &\leq 2^{\alpha+(h-i)/(c_m^{J-1/2})} M_2(n, b_n) c_n^{2M(\nu_n)} \qquad\qquad (\text{por } (4.2.7)) \end{aligned}$$

Ahora usando (1.12.2), entonces

$$\begin{aligned} \|T^{c_n^k} e_i\| &\leq 2^{\alpha+(h-i)/(c_m^{J-1/2})} M_2(n, b_n) c_n^{2M(\nu_n)} \\ &\leq 2^{\alpha+(c_n^k-3c_m^J/8)/(c_m^{J-1/2})} M_2(n, b_n) c_n^{2M(\nu_n)}, \end{aligned}$$

puesto que, por (1.12.2),

$$\begin{aligned} h - i &\le \frac{p^+(c_m) + p(c_m)}{2} + c_n^k - p^+(c_m) \\ &= c_n^k + \frac{p(c_m) - p^+(c_m)}{2} \\ &\le c_n^k - \frac{3}{8} c_m^J. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} 2^{\alpha + (c_n^k - 3c_m^J/8)/(c_m^{J-1/2})} M_2(n, b_n) c_n^{2M(\nu_n)} &\le 2^{c_n^k + (c_n^k - 3c_m^J/8)/(c_m^{J-1/2})} M_2(n, b_n) c_n^{2M(\nu_n)} \\ &\le M_2(n, b_n) c_n^{2M(\nu_n)} 2^{2c_n^M} \cdot 2^{-3c_m^J/8} \\ &< \eta \end{aligned}$$

para todo $m > n$ y $\boldsymbol{d}$ creciendo suficientemente rápido. Puesto que los casos estudiados son todos los posibles,

$$\|T^{c_n^k} \circ (I - R_n^\circ) e_i\| \le 1 + \eta$$

para todo $n \ge 1$, $k \le M(\nu_n)$ e $i \ge 0$. $\square$

6. Los operadores $\tau_{nm} \circ Q^\circ_m$

En la primera parte de esta sección se define el conjunto K_{nm} que será fundamental para probar la ciclicidad de todo vector no nulo de ℓ^1. Posteriormente se prueba que si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido entonces, para todo elemento x no nulo de ℓ^1, el vector $Q^\circ_n(x)$ pertenece al conjunto K_{nm}.

DEFINICIÓN 6.1. *Dados $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$ y la sucesión $\boldsymbol{d}$, se define $K_{nm} \subset F_{\mu_m}$ como el conjunto*

$$\Big\{x \in F_{\mu_m} \,:\, \|x\| \leq a_m,\, \|\tau_{nm}(x)\| \geq \tfrac{1}{a_m}\Big\}.$$

K_{nm} es un conjunto compacto de F_{μ_m}, que depende sólo de la elección de $(a_i)_{i=1}^m, (b_i)_{i=1}^{m-1}, (c_i)_{i=1}^{m-1}$, y del espacio ℓ^1.

DEFINICIÓN 6.2. *Dado $m \in \mathbb{N}$, se define el conjunto $\Delta_m = \{e_i :\ i > \mu_m\}$.*

LEMA 6.3. *Si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido entonces para todo $x \in \ell^1$ con $\|x\| = 1$, $N \in \mathbb{N}$ y $\eta > 0$, existen $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n > N$ tales que*

$$\|\pi_{\Delta_m}(x)\| < \eta$$

y

$$Q^\circ_m(x) \in K_{nm} \tag{6.3.1}$$

Demostración. De la Definición 6.2 resulta obvio que la sucesión de conjuntos $\big(\Delta_i\big)_{i\geq 1}$ están encajados. Por tanto, si $x \in \ell^1$ entonces existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq m_0$, $\|\pi_{\Delta_m}\| < \eta$.

Probemos ahora (6.3.1). Sea $x \in \ell^1$ arbitrario con $\|x\| = 1$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $N = m_0$. Puesto que $\|x\| = 1$, entonces $\|Q^\circ_m(x)\| \leq a_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ por (3.2). Trataremos ahora de encontrar $m > n > N$ tales que

$$\|\tau_{nm} \circ Q^\circ_m(x)\| \geq \frac{1}{a_m}. \tag{6.3.2}$$

Ahora bien, $\max_{i\geq 0} \|Q_n e_i\| = 1$ puesto que $Q_n e_i$ es o cero o algún e_j; por tanto $\|Q_n\| = 1$. Por otra parte, si tomamos $x_0 \in F$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $Q_n(x_0) = x_0$ para todo $n \geq n_0$; además F es denso en ℓ^1. Por tanto se tiene que $\lim_{n\to\infty} Q_n(x) = x$ y $\|Q_n(x) - x\| < 1/2$ para n suficientemente grande. Luego basta elegir $n > N$ de modo que

$$\|Q_n(x)\| \geq \tfrac{1}{2}\|x\| \geq \tfrac{2}{a_n}.$$

Por otra parte, si $z \in F$ entonces también existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $Q_n P_{nk}(z) = z$ para todo $k \geq k_0$. Además $\|Q_n P_{nk}\| \leq a_{n+1}$ para todo $k > n$. Por tanto

$$\lim_{k\to\infty} Q_n P_{nk}(x) = Q_n(x).$$

Elegimos así k suficientemente grande de modo que $\|Q_n P_{nk}(x)\| \geq \frac{1}{a_n}$. Así

$$\tfrac{1}{a_n} \leq \|Q_n P_{nk}(x)\| \leq \|Q_n\| \|P_{nk}(x)\|,$$

es decir,

$$\|P_{nk}(x)\| \geq \frac{1}{a_n \|Q_n\|} = \frac{1}{a_n}. \tag{$*$}$$

Ahora bien, si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido y

$$\|\tau_{nk} \circ Q_k^\circ(x)\| > \frac{1}{2a_n} > \frac{1}{a_k}$$

entonces se tiene (6.3.2).
Supongamos ahora lo contrario,

$$\|\tau_{nk} \circ Q_k^\circ(x)\| \leq \frac{1}{2a_n} \leq \frac{1}{a_k}.$$

Como

$$\|P_{nk}(x)\| = \|\tau_{nk} \circ Q_k(x)\| \geq \frac{1}{a_n} \qquad (\text{de } (*))$$

entonces

$$\begin{aligned} \|\tau_{nk} \circ (Q_k^\circ - Q_k)(x)\| &\geq \big| \|\tau_{nk} Q_k^\circ(x)\| - \|\tau_{nk} Q_k(x)\| \big| \\ &= \big| \|\tau_{nk} Q_k^\circ(x)\| - \|P_{nk}(x)\| \big|. \end{aligned}$$

Puesto que $\|\tau_{nk} Q_k^\circ(x)\|$ es menor o igual que $1/2a_n$ y $\|P_{nk}(x)\|$ es mayor o igual que $1/a_n$ se tiene que

$$\big\|\tau_{nk} \circ (Q_k^\circ - Q_k)(x)\big\| \geq \frac{1}{2a_n}. \tag{6.3.3}$$

De (1.15.1) y de las Definiciones 2.1 y 2.2 tenemos que para todo $j \geq 0$ $(n < k < m)$,

$$\big(Q_k - Q_k^\circ\big) e_j = \begin{cases} e_j - e_j & 0 \leq j \leq k a_k, \\ \\ e_{j - r a_m + (r-m+k) a_k} + a_{m-r} w_{j - r a_m} & j \in G_1^{(r,m)},\ 0 < m-k < r \leq m, \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Puesto que $j - r a_m \in [0, \xi_{m-r}]$, $0 < m-k < r \leq m$ y $(r-(m-k)) a_k \in \big\{a_k, 2a_k, \ldots, k a_k\big\}$, entonces

$$[0, \xi_{m-r}] \subset [0, \xi_{m-(r-m+k)}] = [0, \xi_{m-r'}]$$

y

$$j - r a_m + (r-m+k) a_k \in [r' a_k, r' a_k + \xi_{m-r}].$$

donde $r' = r - m + k \in \big\{(m-k)+1, (m-k)+2, \dots, m\big\}$. Por tanto,

$$j - ra_m + (r-m+k)a_k \in G_1^{(r',m)}.$$

Si escribimos $s = j - ra_m + (r-m+k)a_k$, entonces de (1.15.1),

$$s \in G_1^{(r',m)} \qquad \text{y} \qquad e_s = a_{k-r'}(w_s - w_{s-r'a_k}),$$

es decir,

$$e_s = a_{m-r}(w_s - w_{j-ra_m}).$$

Con lo que

$$\big(Q_k - Q_k^{\circ}\big)e_j = \begin{cases} a_{m-r}w_{j-ra_m+(r-m+k)a_k} & j \in G_1^{(r,m)},\ 0 < m-k < r \leq m, \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora de 2.4, tenemos que

$$\tau_{nk}\big(Q_k - Q_k^{\circ}\big)e_j = \begin{cases} a_{m-r}w_{j-ra_m+(r-m+k)a_k} & j \in G_1^{(r,m)},\ 0 < m-k < r < m-n, \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se sigue que

$$\tau_{nk}\big(Q_k - Q_k^{\circ}\big) = \tau_{nk}\big(Q_k - Q_k^{\circ}\big) \circ \pi_S$$

donde

$$S = \Bigg\{ e_j :\ j \in \bigcup_{\substack{m>k \\ r \in (m-k, m-n)}} G_1^{(r,m)} \Bigg\};$$

y así,

$$S = \bigcup_{m>k} S_m \qquad \text{donde} \qquad S_m = \bigcup_{r \in (m-k, m-n)} G_1^{(r,m)}.$$

Entonces usando ahora (6.3.3),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a_n} < \|\tau_{nk}\big(Q_k - Q_k^{\circ}\big)(x)\| &= \|\tau_{nk}\big(Q_k - Q_k^{\circ}\big) \circ \pi_S(x)\| \\ &\leq \|\tau_{nk}\|\|Q_k - Q_k^{\circ}\|\|\pi_S(x)\|, \end{aligned}$$

y de los Lemas 3.1, 3.2 y 3.3,

$$\begin{aligned} \|\pi_S(x)\| &\geq \frac{1}{2a_n\|\tau_{nk}\|\|Q_k - Q_k^{\circ}\|} \\ &> \frac{1}{2a_n a_{n+1}(1+a_k)}. \end{aligned}$$

Luego para algún $m > k$ $(n < k < m)$ se cumple la desigualdad

$$\begin{aligned}\|\pi_{S_m}(x)\| &> \frac{1}{2 \cdot a_n \cdot a_{n+1}(1 + a_k)} \\ &> \frac{2^{k-m}}{2 \cdot a_n \cdot a_{n+1}(1 + a_k)}.\end{aligned} \tag{6.3.4}$$

En cualquier caso, si $j \in S_m$, entonces

$$\begin{aligned}\tau_{nm} Q_m^\circ(e_j) &= \tau_{nm}(e_j) \\ &= e_j \qquad (j < (m-n)a_m)\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha usado que Q_m° se proyecta en F_{μ_m}, $Q_m^\circ(e_j) = e_j$ si $j \in [0, \mu_m]$ y que $j \in S_m$ si y sólo si $j \in \bigcup_{r \in (0, m-n)} G_1^{(r,m)}$. En particular, $\pi_{S_m} \tau_{nm} Q_m^\circ(e_j) = e_j$ si $j \in S_m$. Más aun, para $j \in \mathbb{N}$

$$Q_m^\circ(e_j) = \begin{cases} e_j & j \le m a_m, \\ \\ -a_{t-r} \cdot w_{j - r a_t} & j \in G_1^{r,t},\ 0 < t - m < r \le t, \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Pero como $j - r a_t \in \bigcup_{0 < t - m < r \le t} [0, \xi_{t-r}] \subset [0, \xi_{m-1}]$ se concluye que

$$Q_m^\circ(e_j) = \begin{cases} e_j & j \le m a_m, \\ \\ -a_{t-r} \cdot w_{j - r a_t} \in F_{\xi_{m-1}} & j \in G_1^{r,t},\ 0 < t - m < r \le t \text{ con } t > m, \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si consideramos las definiciones 2.2, 2.3, entonces

$$\tau_{nm} Q_m^\circ(e_j) = \begin{cases} e_j & j \in [0, \mu_m], \\ \\ \vartheta & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

con

$$\vartheta \in F_{\xi_{m-1}}, \qquad \vartheta = \begin{cases} -a_{t-r} \cdot w_{j - r a_t} & j \in G_1^{r,t},\ 0 < t - m < r \le t, \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además, si $j \notin S_m$ pero cumple que $j \in G_1^{r,t}$, $0 < t - m < r \le t$ con $t > m$, entonces

$$j - r a_t \in [0, \xi_{t-r}] \subset [0, \xi_{m-1}]$$

y por tanto $j - ra_t < a_m$. Puesto que

$$\overline{\operatorname{span}}\{w_l \ : \ 0 \leq l < a_m\} = \overline{\operatorname{span}}\{e_l \ : \ 0 \leq l < a_m\},$$

entonces

$$\begin{aligned} \pi_{S_m}(\vartheta) &= \pi_{S_m}\left(\sum_l \alpha_l e_l\right) \qquad\qquad \text{con } 0 \leq l < a_m, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $\pi_{S_m}\big(\tau_{nm} Q_m^\circ(e_j)\big)$ es igual a $\pi_{S_m}(e_j)$ o bien a $\pi_{S_m}(\vartheta)$ y en ambos casos vale cero para todo $j \notin S_m$. Es decir, $\pi_{S_m} = \pi_{S_m} \circ \big(\tau_{nm} Q_m^\circ\big)$. Puesto que $\|\pi_{S_m}\| = 1$ de (6.3.4) se tiene que

$$\begin{aligned} \|\tau_{nm} \circ Q_m^\circ(x)\| &= \|\tau_{nm} \circ Q_m^\circ(x)\| \cdot \|\pi_{S_m}\| \\ &\geq \|\pi_{S_m} \circ \tau_{nm} \circ Q_m^\circ\| \\ &= \|\pi_{S_m}\| \\ &> \frac{2^{k-m}}{2 \cdot a_n \cdot a_{n+1}(1 + a_k)} \\ &> \frac{1}{a_m}, \end{aligned}$$

para todo $n < k < m$ y $\boldsymbol{d}$ creciendo suficientemente rápido.

Luego hemos probado que siempre existen $m > n > N$ de modo que

$$\big\|\tau_{nm} \circ Q_m^\circ(x)\big\| > \frac{1}{a_m}.$$

Finalmente, si escribimos $y = Q_m^\circ(x)$, entonces

$$\|y\| \leq \|Q_m^\circ\| \leq a_m \qquad \text{y} \qquad \|\tau_{nm} \circ Q_m^\circ(x)\| = \|\tau_{nm}(y)\| > \frac{1}{a_m}.$$

Por tanto, $y \in K_{nm}$. $\square$

7. Algunas propiedades del compacto K_{nm}

En esta sección damos algunas propiedades del conjunto K_{nm} con las que deducimos la ciclicidad del operador T en ℓ^1. Esta ciclicidad de T nos permitirá probar, si $\boldsymbol{d}$ se crece suficientemente rápido, la hiperciclicidad de todo elemento no nulo de ℓ^1 usando fundamentalmente las acotaciones en norma de $T^{c_n^k}$ en algunos subespacios de ℓ^1, el Lema 1.15 así como la propiedad de que ciertas potencias del operador T se acercan en norma al espacio vectorial finitamente generado por $\{T^j : \ j \in [\alpha, \beta], \ \alpha, \beta \in \mathbb{N}\}$ en algún subespacio de ℓ^1.

DEFINICIÓN 7.1. Para $m \in \mathbb{N}$ definimos el operador desplazamiento a la derecha 'truncado' T_m sobre el subespacio F_{μ_m} del siguiente modo:

$$T_m : F_{\mu_m} \to F_{\mu_m} : \qquad w_i \mapsto \begin{cases} w_{i+1}, & 0 \le i < \mu_m, \\ 0, & i = \mu_m. \end{cases}$$

LEMA 7.2. *Existe una función* $N_1 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *con la siguiente propiedad:*

Si $\boldsymbol{d}$ *crece suficientemente rápido, para todo* $n < m$ *y* $x \in K_{nm}$ *entonces existe un polinomio* p *que cumple*

$$|p| \le N_1(m, a_m), \tag{7.2.1}$$

$$\mathrm{grad}(p) \le \mu_m, \qquad t^{a_m} \textit{ divide a } p(t), \tag{7.2.2}$$

y

$$\|p(T_m)x - w_0\| \le \frac{1}{a_m} + \frac{1}{a_{n-1}}. \tag{7.2.3}$$

Demostración. Dado $x \in K_{nm}$, escribimos $x = \sum_{i=\alpha}^{\mu_m} \lambda_i w_i$ donde $\alpha = \min\{i : \ \lambda_i \neq 0\}$ entonces,

$$\mathrm{span}\{T_m^r(x) : \ a_m \le r \le \mu_m\} = \mathrm{span}\{w_{\alpha+a_m}, w_{\alpha+a_m+1}, \dots, w_{\mu_m}\}.$$

En particular, puesto que $\tau_{nm}(x) \neq 0$ $\left(\|\tau_{nm}(x)\| \ge \frac{1}{a_m}\right)$, tenemos que $\alpha < (m-n)a_m$ (ver 2.4), luego

$$w_{(m-n+1)a_m} \in \mathrm{span}\left\{T_m^r(x) : \ a_m \le r \le \mu_m\right\}.$$

Puesto que K_{nm} es compacto, existe un número finito de polinomios $p_1, p_2, \dots, p_K$,

$$p_j(t) = \sum_{i=a_m}^{\mu_m} \lambda_{ij} t^i$$

tales que para todo $x \in K_{nm}$ existe j para el cual

$$\|p_j(T_m)x - w_{(m-n+1)a_m}\| < \tfrac{1}{a_m}.$$

Si escribimos $N = \max_{1\leq j\leq K} |p_j|$ entonces conseguimos que $N \leq N_1(m, a_m)$ para una función apropiada $N_1 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ (puesto que $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido y K_{nm} sólo depende de la elección de $n, m, a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_{m-1}, c_1, \ldots, c_{m-1}$). En vista de (1.15.1), observamos que $\|w_{(m-n+1)a_m} - w_0\| = \frac{1}{a_{n-1}}$, por tanto, si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido, para todo $n < m$, $x \in K_{nm}$ y de la desigualdad triangular tenemos que

$$\begin{aligned}
\|p(T_m)x - w_0\| &= \|p(T_m)x - w_{(m-n+1)a_m} + w_{(m-n+1)a_m} - w_0\| \\
&\leq \|p(T_m)x - w_{(m-n+1)a_m}\| + \|w_{(m-n+1)a_m} - w_0\| \\
&\leq \frac{1}{a_m} + \frac{1}{a_{n-1}}.
\end{aligned}$$

□

8. Algunas propiedades de los operadores $T^{c_n^k}$

En esta sección damos una de las pruebas más importantes de este trabajo: si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido, los operadores $T^{c_n^k}$ están acotados en norma en un subconjunto $H = \{e_i : i \in (\nu_n, \xi_n]\}$ de ℓ^1. Obsérvese que en la prueba de esta propiedad se motivan las definiciones y resultados dados en los apartados (1.11), (1.15.5), (1.15.6) y (4.2).

Para obtener la prueba de este resultado necesitamos probar una serie de lemas previos. Comenzamos esta sección con la siguiente definición.

DEFINICIÓN 8.1. Para cada $r, n \in \mathbb{N}$ con $0 \leq r \leq h_n M(\nu_n)$, definimos

$$L_r^{(n)} = \max\Bigg\{\Bigg\| w_{i+p(c_n)} - \prod_{j=1}^{M(\nu_n)} \big(\bar{p}_{j,\nu_n}(T)\big)^{\alpha_j} w_i \Bigg\| : \\ p \in \Lambda_n \cup \{0\},\ |p| = r,\ p(t) = \sum_{j=1}^{M(\nu_n)} \alpha_j t^j, i \in [0, \nu_n]\Bigg\} \tag{8.1.1}$$

y

$$\bar{L}_r^{(n)} = \max\Bigg\{\Bigg\| w_{i+p(c_n)} - \prod_{j=1}^{M(\nu_n)} \big(\bar{p}_{j,\nu_n}(T)\big)^{\alpha_j} w_i \Bigg\| : \\ p \in \Lambda_n \cup \{0\},\ |p| = r,\ p(t) = \sum_{j=1}^{M(\nu_n)} \alpha_j t^j, i \in [0, 2\nu_n]\Bigg\}. \tag{8.1.2}$$

LEMA 8.2. *Si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido entonces $\bar{L}_r^{(n)} \leq \max\{L_r^{(n)}, c_n^{-1}\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq h_n M(\nu_n)$.*

Demostración. Sea $i \in (\nu_n, 2\nu_n]$ y $|p| = r$ con $p \in \Lambda_n \cup \{0\}$. Por (4.2.2), para todo polinomio $q \in \Lambda_n \cup \{0\}$ tenemos que $\|w_{q(c_n)+\nu_n+1}\| \leq 2^{-\sqrt{c_n}/3}$. En particular, puesto que $\|T\| \leq 2$ si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido,

$$\begin{aligned} \|w_{p(c_n)+i}\| &= \|T^{i-\nu_n-1} w_{p(c_n)+\nu_n+1}\| \\ &\leq 2^{i-\nu_n-\frac{\sqrt{c_n}}{3}} \\ &\leq \frac{1}{2c_n} \end{aligned} \tag{8.2.1}$$

si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido. De la definición de $\big(P_\nu, |\cdot|\big)$,

$$\begin{aligned}
\big|\bar{p}_{j,\nu_n}(T)\big| &= \Big|\sum_{k=0}^{\nu_n} \bar{\alpha}_k T^k\Big| \\
&\leq \|T\|^{\mathrm{gr}(\bar{p}_{j,\nu_n})}\Bigg(\sum_{k=0}^{\nu_n}|\bar{\alpha}_k|\Bigg) \\
&\leq \|T\|^{\mathrm{gr}(\bar{p}_{j,\nu_n})} && (|\bar{p}_{j,\nu_n}| \leq 1) \\
&\leq 2^{\mathrm{gr}(\bar{p}_{j,\nu_n})} && (1 < \|T\| \leq 1+\eta \leq 2) \qquad (8.2.2)
\end{aligned}$$

Ahora, si escribimos $p(t) = \sum_{i=1}^{M(\nu_n)} \alpha_j t^j \in \Lambda_n$, entonces por (8.2.2)

$$\begin{aligned}
\Bigg\|\prod_{j=1}^{M(\nu_n)} \big(\bar{p}_{j,\nu_n}(T)\big)^{\alpha_j} w_i\Bigg\| &\leq \prod_{j=1}^{M(\nu_n)} \big(2^{\mathrm{gr}(\bar{p}_{j,\nu_n})}\big)^{\alpha_j}\|w_i\| \\
&= \|w_i\| \cdot 2^{\sum_{j=1}^{M}\big(\mathrm{gr}(\bar{p}_{j,\nu_n})\alpha_j\big)} && (M = M(\nu_n)) \\
&\leq \|w_i\| \cdot 2^{\big(\sum_{j=1}^{M}\alpha_j\big)\big(\max_j\{\mathrm{gr}(\bar{p}_{j,\nu_n})\}\big)} \\
&\leq \|w_i\| \cdot 2^{\big(\sum_{j=1}^{M}\alpha_j\big)\nu_n} \\
&= \|w_i\| \cdot 2^{|p|\cdot\nu_n} \\
&\leq \|w_i\| \cdot 2^{h_n\cdot M\cdot\nu_n}. && (8.2.3)
\end{aligned}$$

Pero de (8.2.1) tenemos que $\|w_{i+\mathbf{0}(c_n)}\| = \|w_i\| \leq 2^{i-\nu_n-\frac{\sqrt{c_n}}{3}}$. Por tanto (8.2.3) es menor o igual que

$$\begin{aligned}
2^{h_n\cdot M\cdot\nu_n+i-\nu_n-\frac{\sqrt{c_n}}{3}} &\leq \big(c_n^2\cdot 2\big)^{M\cdot\nu_n+2\nu_n-\nu_n-\frac{\sqrt{c_n}}{3}} \\
&\qquad (\text{puesto que } h_n \leq \log_2 c_n^2 + 1 \text{ e } \; i \leq 2\nu_n) \\
&= \big(2c_n^2\big)^{\nu_n\cdot M}\cdot 2^{\nu_n}\cdot 2^{-\frac{\sqrt{c_n}}{3}} \\
&\leq \frac{1}{2c_n} && (8.2.4)
\end{aligned}$$

si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido. Usando (8.2.1), (8.2.4) y la desigualdad triangular

$$\Bigg\|w_{i+p(c_n)} - \prod_{j=1}^{M(\nu_n)}\big(\bar{p}_{j,\nu_n}(T)\big)^{\alpha_j} w_i\Bigg\| \leq \frac{1}{c_n}.$$

Por tanto $\bar{L}_r^{(n)} \leq \max\big\{\frac{1}{c_n}, L_r^{(n)}\big\}$. $\square$

LEMA 8.3. *Si* $\boldsymbol{d}$ *crece suficientemente rápido, entonces para todo* n, r *tales que* $0 \leq r \leq h_n M(\nu_n)$, *se tiene que* $\bar{L}_r^{(n)} \leq \frac{2^r - 1}{c_n}$.

Demostración. Es obvio que $L_0^{(n)} = \bar{L}_0^{(n)} = 0$. Para $r > 0$ procedemos por inducción.

Sea $p \in \Lambda_n$, $|p| = r$ y d=gr(p) con $p(t) = \sum_{k=1}^{M(\nu_n)} \alpha_k t^k$. Para todo $i \in [0, \nu_n]$ tenemos que

$$w_{i+p(c_n)} = \bar{p}_{d,\nu_n}(T) w_{i+p(c_n)-c_n^d} + \frac{2^{|p|-1}}{c_n} e_{i+p(c_n)} \tag{8.3.1}$$

de (1.15.5). Escribimos $q(t) = p(t) - t^d \in \Lambda_n \cup \{0\}$ ($|q| = r - 1$) donde

$$q(t) = \sum_{k=1}^{M(\nu_n)} \beta_k t^k \quad \text{con} \quad \beta_k = \begin{cases} \alpha_k & k \neq d, \\ \alpha_d - 1 & k = d. \end{cases}$$

Sea

$$\bar{p}_{d,\nu_n}(t) = \sum_{j=0}^{\nu_n} \lambda_j t^j, \qquad \sum_{j=0}^{\nu_n} |\lambda_j| = |\bar{p}_{d,\nu_n}| \leq 1,$$

entonces

$$\bar{p}_{d,\nu_n}(T) w_{i+p(c_n)-c_n^d} = \sum_{j=0}^{\nu_n} \lambda_j w_{i+j+q(c_n)}. \tag{8.3.2}$$

Por la definición de $\bar{L}_{r-1}^{(n)}$, para todo $0 \leq i + j \leq 2\nu_n$ tenemos que

$$\left\| w_{i+j+q(c_n)} - \prod_{k=1}^{M(\nu_n)} \left(\bar{p}_{k,\nu_n}(T)\right)^{\beta_k} w_{i+j} \right\| \leq \bar{L}_{r-1}^{(n)}. \tag{8.3.3}$$

Combinando (8.3.2), (8.3.3) y usando la desigualdad triangular,

$$
\begin{aligned}
\Big\|\bar{p}_{d,\nu_n}(T)w_{i+p(c_n)-c_n^d} - \prod_{k=1}^{M(\nu_n)} \big(\bar{p}_{k,\nu_n}(T)\big)^{\alpha_k} w_i\Big\| &\\
&= \Big\|\bar{p}_{d,\nu_n}(T)w_{i+p(c_n)-c_n^d} - \bar{p}_{d,\nu_n}(T)\prod_{k=1}^{M(\nu_n)} \big(\bar{p}_{k,\nu_n}(T)\big)^{\beta_k} w_i\Big\| \\
&= \Big\|\bar{p}_{d,\nu_n}(T)w_{i+p(c_n)-c_n^d} - \sum_{j=0}^{\nu_n}\lambda_j \prod_{k=1}^{M(\nu_n)} \big(\bar{p}_{k,\nu_n}(T)\big)^{\beta_k} w_{i+j}\Big\| \\
&= \Big\|\sum_{j=0}^{\nu_n}\lambda_j w_{i+j+q(c_n)} - \sum_{j=0}^{\nu_n}\lambda_j \prod_{k=1}^{M(\nu_n)} \big(\bar{p}_{k,\nu_n}(T)\big)^{\beta_k} w_{i+j}\Big\| \\
&= \Big\|\sum_{j=0}^{\nu_n}\lambda_j \Big(w_{i+j+q(c_n)} - \prod_{k=1}^{M(\nu_n)} \big(\bar{p}_{k,\nu_n}(T)\big)^{\beta_k} w_{i+j}\Big)\Big\| \\
&\leq \bar{L}_{r-1}^{(n)} \sum_{j=0}^{\nu_n} |\lambda_j| \\
&\leq \bar{L}_{r-1}^{(n)}. \qquad (8.3.4)
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\Big\|w_{i+p(c_n)} - \prod_{k=1}^{M(\nu_n)} \big(\bar{p}_{k,\nu_n}(T)\big)^{\alpha_k} w_i\Big\| &\\
&= \Big\|\bar{p}_{d,\nu_n}(T)w_{i+p(c_n)-c_n^d} - \prod_{k=1}^{M(\nu_n)} \big(\bar{p}_{k,\nu_n}(T)\big)^{\alpha_k} \cdot w_i + \frac{2^{|p|-1}}{c_n} e_{i+p(c_n)}\Big\| \qquad \text{(por (8.3.1))} \\
&\leq \bar{L}_{r-1}^{(n)} + \tfrac{2^{r-1}}{c_n} \qquad \text{(por (8.3.4))}.
\end{aligned}
$$

Por tanto, si tomamos máximo, entonces $L_r^{(n)} \leq \bar{L}_{r-1}^{(n)} + \frac{2^{r-1}}{c_n}$ y, de la hipótesis de inducción, $\bar{L}_{r-1}^{(n)} \leq \frac{2^{r-1}-1}{c_n}$. Luego

$$L_r^{(n)} \leq \tfrac{2^{r-1}-1}{c_n} + \tfrac{2^{r-1}}{c_n} = \tfrac{2^r-1}{c_n}.$$

Si aplicamos el Lema 8.2,

$$\bar{L}_r^{(n)} \leq \max\left\{L_r^{(n)}, \tfrac{1}{c_n}\right\} = \tfrac{2^r-1}{c_n}$$

y, por inducción en r,

$$\bar{L}_r^{(n)} \leq \tfrac{2^r-1}{c_n} \qquad \text{para todo } 0 \leq r \leq h_n M(\nu_n). \qquad \square$$

Antes de dar la prueba del Lema 8, es necesario dar unos lemas preliminares más.

LEMA 8.4. *Si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido entonces para todo $p \in \Lambda_n \cup \{0\}$ y todo polinomio $q(t) = p(t) + t^k$ tal que $q \notin \Lambda_n$ $(1 \leq k \leq M(\nu_n))$, se tiene que*

$$\|w_{i+c_n^k}\| \leq 2 \cdot 2^{-\frac{\sqrt{c}_n}{2}}$$

para todo $i \in [p(c_n), p(c_n) + 2c_n^k]$.

Demostración. Si $q(t) = t^k + p(t) \notin \Lambda_n$, esto implica (por 1.10) que $p(t)$ posee al menos un coeficiente del orden de h_n en t^k. Por tanto, escribimos

$$p(t) = \sum_{j=1}^{M(\nu_n)} \alpha_j t^j = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j t^j + \sum_{j=k}^{k_1} h_n t^j + \sum_{j=k_1+1}^{M(\nu_n)} \alpha_j t^j \tag{8.4.1}$$

donde $k_1 \geq k$, y si $k_1 < M(\nu_n)$, $\alpha_{k_1+t} < h_n$ con $t = 1, 2, \ldots, M - k_1 - 1$.
Caso 1. Si $k_1 < M(\nu_n)$, entonces

$$\begin{aligned} i + c_n^k &\geq p(c_n) + c_n^k > p(c_n) + \sum_{j=1}^{k-1} h_n c_n^j + \nu_n \\ &\qquad \big(\text{ya que } h_n = E(2\log_2 c_n) \text{ y } \boldsymbol{d} \text{ crece suficientemente rápido}\big) \\ &\geq \sum_{j=1}^{k_1} h_n c_n^j + \sum_{j=k_1+1}^{M(\nu_n)} \alpha_j c_n^j + \nu_n \\ &= q_0(c_n) + \nu_n. \end{aligned} \tag{8.4.2}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} i + c_n^k &\leq p(c_n) + 3c_n^k \\ &< p(c_n) + c_n^{k_1+1} - \sum_{j=1}^{k_1} h_n c_n^j \qquad (\text{si } \boldsymbol{d} \text{ crece suficientemente rápido}) \\ &\leq c_n^{k_1+1} + \sum_{j=k_1+1}^{M(\nu_n)} \alpha_j c_n^j \\ &= q_1(c_n). \end{aligned} \tag{8.4.3}$$

Obsérvese que los polinomios anteriormente definidos q_0, q_1 pertenecen a Λ_n y cumplen que $q_0^+ = q_1$ con $J(q_0) = k_1 + 1$. Por tanto, $i + c_n^k \in (q_0(c_n) + \nu_n, q_1(c_n))$ y por (1.15.6), $w_{i+c_n^k} = \varepsilon e_{i+c_n^k}$ donde

$$\varepsilon = \|w_{i+c_n^k}\| = 2^{(i+c_n^k-h)/c_n^{1/2+k_1}}, \qquad h = (q_1(c_n) + q_0(c_n))/2. \tag{8.4.4}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
i + c_n^k - h &\le p(c_n) + 3c_n^k - h \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j c_n^j + \sum_{j=k}^{k_1} h_n c_n^j + \sum_{k_1+1}^{M(\nu_n)} \alpha_j c_n^j + 3c_n^k \\
&\quad - \sum_{k_1+1}^{M(\nu_n)} \alpha_j c_n^j - \frac{\sum_{j=1}^{k_1} h_n c_n^j + c_n^{k_1+1}}{2} \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} (\alpha_j - \tfrac{1}{2} h_n) c_n^j + \sum_{j=k}^{k_1} (h_n - \tfrac{1}{2} h_n) c_n^j + 3c_n^k - \frac{c_n^{k_1+1}}{2} \\
&= \sum_{j=1}^{k_1} (\alpha_j - \tfrac{1}{2} h_n) c_n^j + 3c_n^k - \frac{c_n^{k_1+1}}{2}
\end{aligned}$$

por (8.4.1). Pero $\sum_{j=1}^{k_1} (\alpha_j - \frac{h_n}{2}) c_n^j + 3c_n^k \le c_n^{k_1+\frac{1}{2}}$ si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido. Por tanto

$$i + c_n^k - h \le -\tfrac{1}{2} c_n^{k_1+1} + c_n^{k_1+\frac{1}{2}}$$

y así,

$$\begin{aligned}
\varepsilon = 2^{\frac{i+c_n^k-h}{c_n^{1/2+k_1}}} &\le 2 \cdot 2^{\frac{-1/2 c_n^{k_1+1}}{c_n^{k_1+1/2}}} \\
&= 2 \cdot 2^{-\frac{\sqrt{c_n}}{2}}.
\end{aligned}$$

Caso 2. Si $k_1 = M(\nu_n)$, $i \in [p(c_n), p(c_n)+2c_n^k]$ entonces escribimos $p(t) = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j t^j + \sum_{j=k}^{k_1} h_n t^j$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
p(c_n) &= \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j c_n^j + \sum_{j=k}^{k_1} h_n c_n^j \\
&< \tfrac{1}{2} c_n^k + \sum_{j=k}^{k_1} h_n c_n^j.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\xi_n &= \nu_n + h_n \sum_{j=1}^{k_1} c_n^j \\
&< \tfrac{1}{2} c_n^k + \tfrac{1}{2} c_n^k + \sum_{j=k}^{k_1} h_n c_n^j \\
&\le i + c_n^k.
\end{aligned}$$

Luego

$$\|w_{i+c_n^k}\| = \|T^\alpha w_{\xi_n+1}\|$$

con $0 \le \alpha < 3c_n^k$ puesto que $i \in [p(c_n), p(c_n) + 2c_n^k]$. Así

$$\begin{aligned}
\|T^\alpha w_{\xi_n+1}\| &\le 2^{3c_n^M} \|w_{\xi_n+1}\| && (\text{M=M}(\nu_n),\ \alpha < 3c_n^k \text{ y } \|T\| \le 2)\\
&= 2^{3c_n^M + (1+\xi_n - a_{n+1}/2)/(\sqrt{a}_{n+1})} && (\text{por } (1.15.2))\\
&< 2 \cdot 2^{-\frac{\sqrt{c}_n}{2}}.
\end{aligned}$$

□

LEMA 8.5. *Si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido, entonces:*

(a) Para todo polinomio $p \in \Lambda_n \cup \{0\}$, $p < \hat{p}_n$, se tiene que

$$p^+(c_n) - p(c_n) = c_n^J - \sum_{j=1}^{J-1} h_n c_n^j, \qquad J = J(p). \tag{8.5.1}$$

(b) $\|w_i\| \le 2^{\sqrt{c_n}/2}$ para todo $0 \le i \le 2\xi_n$.

Demostración. (a) Si $p < \hat{p}_n$ escribimos $p(t) = h_n \sum_{m=1}^k t^m + \sum_{m=k+1}^{M(\nu_n)} \alpha_m t^m$ con $k < M(\nu_n)$ y $\alpha_{k+1} < h_n$. Entonces $p^+(t) = t^{k+1} + \sum_{m=k+1}^{M(\nu_n)} \alpha_m t^m$ y $J(p) = k+1$.

(b) Si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido entonces $\|w_i\| \le M_2(n, b_n) < 2^{\sqrt{c_n}/2}$, $0 \le i \le \nu_n$ usando (1.17.2). Si $i \in G_5^{(n)}$ con $p \in \Lambda_n$ entonces, por (4.2.7),

$$\begin{aligned}
\|w_i\| &= M_2(n, b_n) c_n^{2M(\nu_n)}\\
&< 2^{\sqrt{c}_n/2}
\end{aligned}$$

si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido.

Por otro lado, si $i \in (p(c_n) + \nu_n, p^+(c_n))$ para algún $p \in \Lambda_n \cup \{0\}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|w_i\| &= 2^{(i-h)/(c_n^{J-1/2})} && (h = ((p(c_n) + p^+(c_n))/2, \quad J = J(p))\\
&\le 2^{(p^+(c_n)-1-h)/(c_n^{J-1/2})}\\
&\le 2^{\frac{c_n^J}{2c_n^{J-1/2}}} && (\text{por (a)})\\
&= 2^{\frac{\sqrt{c}_n}{2}}.
\end{aligned}$$

Si $\xi_n < i \le 2\xi_n$ entonces, por (1.15.2), $\|w_i\| = 2^{\frac{i-h}{\sqrt{a_{n+1}}}} < 1$ con $h = \frac{1}{2}a_{n+1}$ y $\boldsymbol{d}$ creciendo suficientemente rápido. El Lema 8.5 queda así probado. □

Veamos ahora la prueba del lema principal de esta sección.

LEMA 8. *Si* $\boldsymbol{d}$ *crece suficientemente rápido entonces para todo* $k, n \in \mathbb{N}$ *tales que* $1 \leq k \leq M(\nu_n)$,

$$\|T^{c_n^k} \circ \pi_H\| < 6, \tag{8.0.1}$$

donde $H = \big\{e_i : \; i \in (\nu_n, \xi_n]\big\}$.

Demostración. Sea $H = \big\{e_i : i \in (\nu_n, \xi_n]\big\}$, entonces π_H es una proyección y la imagen de H por esta aplicación, es isomorfa a $\ell^1_{|H|}$ con base $\big\{e_i : i \in (\nu_n, \xi_n]\big\}$. Por tanto, probar (8.0.1) es equivalente a probar

$$\max_{\substack{i \in (\nu_n, \xi_n] \\ 1 \leq k \leq M(\nu_n)}} \|T^{c_n^k} e_i\| < 6. \tag{8.0.2}$$

La prueba de esta desigualdad la damos estudiando los casos para los diferentes valores de i.

Caso 1. Si $i \in G_5^{(n)}$ con $p \in \Lambda_n$, $|p| = r$ y $\operatorname{gr}(p) = d$, entonces por (1.15.5)

$$e_i = 2^{1-r} c_n \big(w_i - \bar{p}_{d,\nu_n}(T) w_{i-c_n^d}\big). \tag{8.0.3}$$

Así que

$$T^{c_n^k} e_i = 2^{1-r} c_n \big(w_{i+c_n^k} - \bar{p}_{d,\nu_n}(T) w_{i-c_n^d+c_n^k}\big). \tag{8.0.4}$$

Escribimos $p(t) = \sum_{j=1}^{M(\nu_n)} \alpha_j t^j$.

Caso 1*a*. Supongamos $p(t) + t^k \in \Lambda_n$. Entonces por la Definición 8.1, si escribimos

$$\bar{\alpha}_j = \begin{cases} \alpha_j & j \neq k, \\ \alpha_k + 1 & j = k, \end{cases}$$

tenemos que

$$\left\| w_{i+c_n^k} - \prod_{j=1}^{M(\nu_n)} \big(\bar{p}_{j,\nu_n}(T)\big)^{\bar{\alpha}_j} w_{i-p(c_n)} \right\| \leq L_{r+1}^{(n)}.$$

Más aun, si escribimos ahora

$$\bar{\bar{\alpha}}_j = \begin{cases} \bar{\alpha}_j & j \neq d, \\ \alpha_j - 1 & j = d; \end{cases}$$

tenemos también para todo $0 \leq l \leq \nu_n$,

$$\left\| w_{i-c_n^d+c_n^k+l} - \prod_{j=1}^{M(\nu_n)} \big(\bar{p}_{j,\nu_n}(T)\big)^{\bar{\bar{\alpha}}_j} w_{i-p(c_n)+l} \right\| \leq \bar{L}_r^{(n)}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
&\Big\|\bar{p}_{d,\nu_n}(T)w_{i-c_n^d+c_n^k} - \prod_{j=1}^{M(\nu_n)} \big(\bar{p}_{j,\nu_n}(T)\big)^{\bar{\alpha}_j} w_{i-p(c_n)}\Big\| \\
&\qquad = \Big\|\bar{p}_{d,\nu_n}(T)\Big(w_{i-c_n^d+c_n^k} - \big(\bar{p}_{d,\nu_n}(T)\big)^{-1} \prod_{j=1}^{M(\nu_n)} \big(\bar{p}_{j,\nu_n}(T)\big)^{\bar{\alpha}_j} w_{i-p(c_n)}\Big)\Big\| \\
&\qquad \leq |\bar{p}_{d,\nu_n}(T)| \Big\|w_{i-c_n^d+c_n^k} - \prod_{j=1}^{M(\nu_n)} \big(\bar{p}_{j,\nu_n}(T)\big)^{\bar{\bar{\alpha}}_j} w_{i-p(c_n)}\Big\| \\
&\qquad \leq |\bar{p}_{d,\nu_n}| \cdot \bar{L}_r^{(n)} \\
&\qquad \leq \bar{L}_r^{(n)}.
\end{aligned} \tag{8.0.5}$$

Así

$$\begin{aligned}
\big\|T^{c_n^k} e_i\big\| &\leq 2^{1-r} c_n \big\|w_{i+c_n^k} - \bar{p}_{d,\nu_n}(T) w_{i-c_n^d+c_n^k}\big\| \\
&\leq 2^{1-r} c_n \Big\|w_{i+c_n^k} - \prod_{j=1}^{M(\nu_n)} \big(\bar{p}_{j,\nu_n}(T)\big)^{\bar{\alpha}_j} w_{i-p(c_n)}\Big\| \\
&\qquad + 2^{1-r} c_n \Big\|\prod_{j=1}^{M(\nu_n)} \big(\bar{p}_{j,\nu_n}(T)\big)^{\bar{\alpha}_j} w_{i-p(c_n)} - \bar{p}_{d,\nu_n}(T) w_{i-c_n^d+c_n^k}\Big\| \\
&\leq 2^{1-r} c_n \big(L_{r+1}^{(n)} + \bar{L}_r^{(n)}\big) \\
&\leq 2^{1-r} c_n \cdot \left(\frac{2^r - 1}{c_n} + \frac{2^{r+1} - 1}{c_n}\right) \qquad \text{(por el Lema 8.3)} \\
&= 2 - 2^{1-r} + 2^2 - 2^{1-r} \\
&= 6 - 2 \cdot 2^{1-r} \\
&= 6 - 2^{2-r} \\
&< 6.
\end{aligned}$$

Caso 1*b*. Si $p(t) + t^k \notin \Lambda_n$ y aplicamos el Lema 8.4 obtenemos

$$\|w_{i+c_n^k}\| \leq 2 \cdot 2^{-\sqrt{c_n}/2} \tag{8.0.6}$$

para todo $i \in [p(c_n), p(c_n) + 2c_n^k]$, $p \in \Lambda_n \cup \{0\}$. Si $p(t) - t^d + t^k \notin \Lambda_n$, entonces de forma similar tenemos que

$$\begin{aligned}
\big\|\bar{p}_{d,\nu_n}(T) w_{i-c_n^d+c_n^k}\big\| &\leq 2 \cdot 2^{-\sqrt{c_n}/2} |\bar{p}_{d,\nu_n}| \\
&\leq 2 \cdot 2^{-\sqrt{c_n}/2}.
\end{aligned}$$

Por tanto, de (8.0.4),

$$\begin{aligned}\|T^{c_n^k} e_i\| &\le 2^{1-r} c_n \big(2 \cdot 2^{-\sqrt{c_n}/2} + 2 \cdot 2^{-\sqrt{c_n}/2}\big)\\ &= 2^{1-r} c_n \cdot 2^3 \cdot 2^{-\sqrt{c_n}/2}\\ &< 1\end{aligned}$$

si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido. Si $(p(t)-t^d)+t^k \in \Lambda_n$ entonces $d=k$ (puesto que $p(t)+t^k \notin \Lambda_n$ y se cumple que $\alpha_k = h_n$). Ahora, de la Definición 8.1,

$$\begin{aligned}&\Big\|\bar{p}_{d,\nu_n}(T) w_{i-c_n^d+c_n^k} - \prod_{j=1}^{M(\nu_n)} \big(\bar{p}_{j,\nu_n}(T)\big)^{\bar{\alpha}_j} w_{i-p(c_n)}\Big\|\\ &\qquad = \Big\|\bar{p}_{d,\nu_n}(T)\Big(w_i - \prod_{j=1}^{M(\nu_n)} \big(\bar{p}_{j,\nu_n}(T)\big)^{\alpha_j} w_{i-p(c_n)}\Big)\Big\|\\ &\qquad \le |\bar{p}_{d,\nu_n}(T)| \cdot L_r^{(n)}\\ &\qquad \le |\bar{p}_{d,\nu_n}(T)| \cdot \bar{L}_r^{(n)}\\ &\qquad \le \bar{L}_r^{(n)}\end{aligned}$$

Más aun, puesto que $0 \le i - p(c_n) \le \nu_n$, $|\bar{p}_{j,\nu_n}| \le 1$, entonces

$$\Big\|\prod_{j=1}^{M(\nu_n)} \big(\bar{p}_{j,\nu_n}(T)\big)^{\bar{\alpha}_j} w_{i-p(c_n)}\Big\| \le \max_{0 \le j \le \nu_n + \mathrm{gr}(\bar{p})} \|w_j\| \tag{8.0.7}$$

donde $\bar{p} = \prod_{j=1}^{M(\nu_n)} (\bar{p}_{j,\nu_n})^{\bar{\alpha}_j}$. Ahora bien, $\mathrm{gr}(\bar{p}_{j,\nu_n}) \le \nu_n$ para todo j, luego

$$\mathrm{gr}(\bar{p}) \le M(\nu_n)\nu_n \max_j \bar{\alpha}_j \le M(\nu_n)\nu_n(1+h_n) \le \tfrac{1}{4} c_n$$

si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido. Así que

$$\begin{aligned}\max_{0 \le j \le \nu_n + \mathrm{gr}(\bar{p})} \|w_j\| &\le \max\Big\{\Big(\max_{0 \le j \le \nu_n} \|w_j\|\Big),\ \Big(\max_{\nu_n < j \le c_n/4} \|w_j\|\Big)\Big\}\\ &\le \max\big\{M_2(n,b_n),\ 2^{-\frac{\sqrt{c_n}}{4}}\big\} \qquad \big(\text{de } (1.15.6),\ (1.17.2)\big)\\ &\le M_2(n,b_n)\end{aligned}$$

Por tanto, usando la desigualdad triangular

$$\begin{aligned}\big\|\bar{p}_{d,\nu_n}(T) w_{i-c_n^d+c_n^k}\big\| &\le \Big\|\bar{p}_{d,\nu_n}(T) w_{i-c_n^d+c_n^k} - \prod_{j=1}^{M(\nu_n)} \big(\bar{p}_{j,\nu_n}(T)\big)^{\bar{\alpha}_j} w_{i-p(c_n)}\Big\|\\ &\qquad + \Big\|\prod_{j=1}^{M(\nu_n)} \big(\bar{p}_{j,\nu_n}(T)\big)^{\bar{\alpha}_j} w_{i-p(c_n)}\Big\|\\ &\le \bar{L}_r^{(n)} + M_2(n,b_n).\end{aligned} \tag{8.0.8}$$

Así,

$$
\begin{aligned}
\|T^{c_n^k}e_i\| &\le \left\| 2^{1-r}c_n(w_{i+c_n^k} - \bar{p}_{d,\nu_n}(T)w_{i-c_n^d+c_n^k})\right\| \\
&\le 2^{1-r}c_n\cdot\left(2\cdot 2^{-\sqrt{c}_n/2} + \bar{L}_r^{(n)} + M_2(n,b_n)\right) && \text{(por (8.0.6),(8.0.8))} \\
&\le 2^{1-r}c_n\cdot\left(2\cdot 2^{-\sqrt{c}_n/2} + \frac{2^r}{c_n} - \frac{1}{c_n} + M_2(n,b_n)\right) && \text{(por el Lema 8.3)} \\
&\le 2 + 2^{1-r}c_n\cdot\Big(2 + M_2(n,b_n)\Big) - 2^{1-r} \\
&\le 2 + 2^{1-r}c_n\cdot\Big(2 + M_2(n,b_n)\Big) \\
&\le 2 + 2^{1-h_n}\cdot\Big(2 + M_2(n,b_n)\Big) \qquad (r \ge h_n) \\
&\le 2 + 2\cdot c_n^{-2}\cdot c_n\big(2 + M_2(n,b_n)\big) && (8.0.9)
\end{aligned}
$$

(puesto que $\log_2 c_n^2 < h_n \le \log_2 c_n^2 + 1$; luego $\log_2(c_n^{-2}) + 1 > 1 - h_n$ y por tanto $2c_n^{-2} > 2^{1-h_n}$). Así que (8.0.9) es menor o igual que $2 + 2\cdot c_n^{-2}\cdot c_n\big(2 + M_2(n,b_n)\big)$ que es menor o igual que 3 si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido. Esto concluye el Caso 1, siendo $\|T^{c_n^k}e_i\|$ menor que 6 en todos los subcasos.

Caso 2. Supongamos que $i \in (p(c_n) + \nu_n, p^+(c_n))$ para algún $p \in \Lambda_n \cup \{0\}$, $p < \hat{p}_n$. Si escribimos

$$
p(t) = \sum_{j=1}^{M(\nu_n)} \alpha_j t^j, \quad p^+(t) = \sum_{j=1}^{M(\nu_n)} \alpha_j^+ t^j, \quad \text{y} \quad J = J(p) = \max\{j : \alpha_j \ne \alpha_j^+\},
$$

entonces, por (1.15.6),

$$
T^{c_n^k}e_i = 2^{\frac{h-i}{c_n^{J-1/2}}}\cdot w_{i+c_n^k} \qquad \big(\text{con } h = (p^+(c_n) + p(c_n))/2\big)
$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
\|T^{c_n^k}e_i\| &\le 2^{\frac{(p^+(c_n)+p(c_n))/2 - p(c_n) - \nu_n}{c_n^{J-1/2}}}\|w_{i+c_n^k}\| \\
&= 2^{\frac{c_n^J - \sum_{j=1}^{J-1} h_n c_n^j - 2\nu_n}{2c_n^{J-1/2}}}\|w_{i+c_n^k}\| \\
&\le 2^{\frac{\sqrt{c}_n}{2}}\|w_{i+c_n^k}\|. && (8.0.10)
\end{aligned}
$$

Caso 2*a*. Supongamos que $J(p) = J > k$. Si $i + c_n^k \geq p^+(c_n)$ entonces por (8.5.1)

$$\begin{aligned} i - h &\geq \left(p^+(c_n) - c_n^k\right) - h \\ &= p^+(c_n) - \frac{p^+(c_n) + p(c_n)}{2} - c_n^k \\ &= \frac{1}{2}\left(c_n^J - \sum_{j=1}^{J-1} h_n c_n^j\right) - c_n^k. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{i-h}{c_n^{J-1/2}} &\geq \frac{\sqrt{c}_n}{2} - \frac{\sum_{j=1}^{J-1} h_n c_n^j}{c_n^{J-1/2}} - \frac{c_n^k}{c_n^{J-1/2}} \\ &\geq \frac{\sqrt{c}_n}{2} - 1 \end{aligned}$$

si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido. Así que tenemos

$$\begin{aligned} \|T^{c_n^k} e_i\| &\leq 2^{1-\sqrt{c}_n/2} \|w_{i+c_n^k}\| \\ &\leq 2^{1-\sqrt{c}_n/2} \cdot 2^{\sqrt{c}_n/2} && \text{(por 8.5(b))} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Por otro lado, si $i + c_n^k < p^+(c_n)$ entonces,

$$\begin{aligned} T^{c_n^k} e_i &= 2^{\frac{h-i}{c_n^{J-1/2}}} T^{c_n^k} w_i \\ &= 2^{\frac{h-i}{c_n^{J-1/2}}} \cdot 2^{\frac{i+c_n^k-h}{c_n^{J-1/2}}} e_{i+c_n^k} && \text{(por (1.15.6))} \\ &= 2^{\frac{c_n^k}{c_n^{J-1/2}}} e_{i+c_n^k}. \end{aligned}$$

Luego finalmente, $\|T^{c_n^k e_i}\| \leq 2^{1/\sqrt{c}_n} < 2$ pues $J > k$.

Caso 2*b*. Supongamos que $J \leq k$ y $p(t) + t^k \notin \Lambda_n$. Por el Lema 8.5(a) tenemos que $i < p^+(c_n) < p(c_n) + c_n^k$, luego $i \in [p(c_n), p(c_n) + 2c_n^k]$. Aplicando el Lema 8.4, concluimos que $\|w_{i+c_n^k}\| \leq 2 \cdot 2^{-\sqrt{c}_n/2}$. Así que por (8.0.10), $\|T^{c_n^k} e_i\| \leq 2^{\sqrt{c}_n/2} \cdot 2 \cdot 2^{-\sqrt{c}_n/2} = 2$.

Caso 2*c*. $J \leq k$ y $p(t) + t^k \in \Lambda_n$. Si $J \neq k$ o si el coeficiente de t^k en $p^+(t)$ es menor que h_n entonces $(p^+(t) + t^k) \in \Lambda_n$ y $p^+(t) + t^k = (p(t) + t^k)^+$. Luego, de (1.15.6),

$$\begin{aligned} T^{c_n^k} e_i &= 2^{\frac{h-i}{c_n^{J-1/2}}} w_{i+c_n^k} \\ &= 2^{\frac{h-i}{c_n^{J-1/2}}} \cdot 2^{\frac{i-h+c_n^k}{c_n^{J-1/2}}} e_{i+c_n^k} \\ &= e_{i+c_n^k}, \end{aligned}$$

$\big(i + c_n^k \in (q(c_n) + \nu_n, q^+(c_n))$ con $q(t) = p(t) + t^k\big)$. Supongamos que $J = k$ y el coeficiente de t^k en $p^+(t)$ es h_n. Sea $q(t) = p(t) + t^k$, entonces o bien $q = \hat{p}_n$ o bien $J(q) \geq k + 1$. Más aun, si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido entonces,

$$i + c_n^k \in (q(c_n) + \nu_n, p^+(c_n) + c_n^k) \subseteq (q(c_n) + \nu_n, q(c_n) + 2c_n^k)$$

por 8.5(a) $\big(p^+(c_n) < c_n^J + p(c_n)\big)$. Si $q = \hat{p}_n$ entonces $q(c_n) + \nu_n = \xi_n$ y si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido, (1.15.2) da que

$$\|w_{i+c_n^k}\| = 2^{\frac{i-a_{n+1}/2}{\sqrt{a}_{n+1}}} \leq 2^{\frac{\xi_n+2c_n^k-a_{n+1}/2}{\sqrt{a}_{n+1}}}.$$

Por tanto, de (8.0.10)

$$\|T^{c_n^k} w_i\| \leq 2^{\frac{\xi_n+2c_n^k-a_{n+1}/2}{\sqrt{a}_{n+1}}} \cdot 2^{\sqrt{c}_n/2} < 1$$

si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido y si $q < \hat{p}_n$, entonces $\|w_{i+c_n^k}\| = 2^{\frac{i-h}{c_n^{J-1/2}}} \leq 2 \cdot 2^{-\sqrt{c}_n/2}$ por (1.15.6). Esto concluye el Caso 2, siendo $\|T^{c_n^k} e_i\|$ menor que 6 en todos los subcasos. Así que el Lema 8 queda probado. $\square$

Para concluir esta sección damos el siguiente lema que se deduce de la Nota 2.3.

LEMA 8.6. *Sea $m \in \mathbb{N}$, y sea $H = \{e_i : \nu_m < i \leq \xi_m\}$. Entonces $\pi_H = \pi_H \circ R_m^\circ$.*

Demostración. Si $j \in (\nu_m, \xi_m]$ entonces, por la Definición 2.2, $R_m^\circ e_j = e_j$ y por tanto

$$\pi_H e_j = \pi_H R_m^\circ e_j = e_j.$$

Para $j \notin (\nu_m, \xi_m]$, la Definición 2.2 da que o bien $R_m^\circ e_j = e_j$ o $R_m^\circ e_j = 0$, o bien

$$R_m^\circ e_j = -a_{n-r} w_{j-ra_n}$$

cuando $j \in G_1^{(r,n)}$ con $0 < n - m < r \leq n$. En este último caso,

$$R_m^\circ e_j \in F_{\xi_{m-1}}$$

ya que $n - r < m$ y $j - ra_n \in [0, \xi_{n-r}]$. Por tanto, para todo $j \notin (\nu_m, \xi_m]$, tenemos que $R_m^\circ e_j$ pertenece al núcleo de la proyección π_H. Así que

$$\pi_H e_j = \pi_H R_m^\circ e_j = 0.$$

Luego $\pi_H = \pi_H \circ R_m^\circ$. $\square$

9. El Lema principal

LEMA 9. *Si* $\boldsymbol{d}$ *crece suficientemente rápido entonces para todo* $m, n \in \mathbb{N}$, $2 \leq n < m$, *y para todo* x *de* ℓ^1, $\|x\| = 1$, *tal que*

$$Q_m^\circ(x) \in K_{nm},$$

y para todo polinomio s *con* $\mathrm{gr}(s) \leq n$, $|s| \leq n$, *existe* k, $1 \leq k \leq M(\nu_n)$, *tal que*

$$\left\|T^{c_m^k} x - s(T)w_0\right\| \leq 8\left\|\pi_{\Delta_m}(x)\right\| + 2a_{n-1}^{-1/2}. \tag{9.0.1}$$

Demostración. Escribimos

$$z = Q_m^\circ(x) = \sum_{i=0}^{\mu_m} z_i w_i. \tag{9.0.2}$$

Por (7.2) existe un polinomio p con $|p| \leq N_1(m, a_m)$, $\mathrm{gr}(p) \leq \mu_m$ y t^{a_m} divide a $p(t)$. Además

$$\left\|p(T_m)z - w_0\right\| \leq \frac{1}{a_m} + \frac{1}{a_{n-1}}.$$

Consideramos el polinomio $q(t) = \frac{t^{b_m}}{b_m} p(t)s(t)$. Entonces $|q| \leq \frac{n}{b_m} N_1(m, a_m) < \frac{1}{\sqrt{b_m}}$, y

$$\mathrm{gr}(q) \leq b_m + \mu_m + n < \nu_m \qquad (n < m) \tag{9.0.3}$$

si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido. Puesto que Γ_{ν_m} es un ε-red (minimal), entonces existe k con $1 \leq k \leq M(\nu_m)$ tal que

$$\left|\bar{p}_{k,\nu_m} - q\right| \leq \frac{1}{4^{\nu_m}}. \tag{9.0.4}$$

Éste es el k que utilizamos en (9.0.1). Sea $H = \{e_i : i \in (\nu_m, \xi_m]\}$ como en la Sección 8. Puesto que por el Lema 8.6 $\pi_H = \pi_H \circ R_m^\circ$ entonces,

$$\begin{aligned} T^{c_m^k}(x) &= T^{c_m^k}(I - R_m^\circ)x + T^{c_m^k}(I - \pi_H)R_m^\circ x + T^{c_m^k}\pi_H x \\ &= T^{c_m^k}(I - R_m^\circ)x + T^{c_m^k}\pi_H x + T^{c_m^k}\big(Q_m^\circ(x) + (\pi_S - \pi_H)(x)\big) \\ &= T^{c_m^k}(I - R_m^\circ)x + T^{c_m^k}\pi_H x + T^{c_m^k}\big(z + (\pi_S - \pi_H)(x)\big) \end{aligned}$$

de la Definición 2.2, donde $S = \{e_i : i \in (\mu_m, \xi_m]\}$ y $\pi_S = \pi_S \circ R_m^\circ$. Por tanto,

$$\begin{aligned} T^{c_m^k}(x) - s(T)w_0 = &T^{c_m^k}(I - R_m^\circ)x + T^{c_m^k}\pi_H x \\ &+ \big(T^{c_m^k} - \bar{p}_{k,\nu_m}(T)\big)(z + (\pi_S - \pi_H)x) \\ &+ \big(\bar{p}_{k,\nu_m}(T) - q(T)\big)(z + (\pi_S - \pi_H)x) \\ &+ q(T)(\pi_S - \pi_H)x + \big(q(T) - p(T)s(T)\big)z \\ &+ \big(s(T)p(T) - s(T)p(T_m)\big)z \\ &+ \big(s(T)p(T_m)z - s(T)w_0\big), \end{aligned}$$

donde T_m es el operador T 'truncado' dado en la definición 7.1. Si tomamos norma,

$$\begin{aligned}\left\|T^{c_m^k}(x)-s(T)w_0\right\| \leq \left\|T^{c_m^k}(I-R_m^\circ)x\right\| &+ \left\|T^{c_m^k}\pi_H x\right\| \\ &+ \left\|\big(T^{c_m^k}-\bar{p}_{k,\nu_m}(T)\big)(z+(\pi_S-\pi_H)x)\right\| \\ &+ \left\|\big(\bar{p}_{k,\nu_m}(T)-q(T)\big)(z+(\pi_S-\pi_H)x)\right\| \\ &+ \left\|q(T)(\pi_S-\pi_H)x\right\| \\ &+ \left\|\big(q(T)-p(T)s(T)\big)z\right\| \\ &+ \left\|\big(s(T)p(T)-s(T)p(T_m)\big)z\right\| \\ &+ \left\|\big(s(T)p(T_m)z-s(T)w_0\big)\right\|.\end{aligned} \tag{9.0.5}$$

Estimemos los 8 términos anteriores.

$$\begin{aligned}\left\|s(T)p(T_m)z-s(T)w_0\right\| &\leq \left\|s(T)\right\|\cdot\left(\frac{1}{a_m}+\frac{1}{a_{n-1}}\right) \\ &\leq |s|\cdot 2^{\mathrm{gr}(s)}\cdot\left(\frac{1}{a_m}+\frac{1}{a_{n-1}}\right) \qquad \text{(puesto que } \|T\|\leq 2) \\ &\leq n\cdot 2^n\cdot\left(\frac{1}{a_m}+\frac{1}{a_{n-1}}\right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{a}_{n-1}}\end{aligned}$$

para $n\geq 2$, si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido. Por otro lado,

$$\left\|\big(s(T)p(T)-s(T)p(T_m)\big)z\right\| \leq n\cdot 2^n\cdot\left\|p(T)-p(T_m)z\right\|; \tag{9.0.6}$$

además, para cada $r\in\mathbb{N}$, $T^r-T_m^r=\sum_{l=1}^r T^{r-l}\big(T-T_m\big)T_m^{l-1}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\left\|\big(T^r-T_m^r\big)z\right\| &\leq \left(\sum_{k=0}^{r-1}\|T\|\right)\cdot\max_{0\leq t\leq\mu_m}\left\|(T-T_m)T_m^t z\right\| \\ &\leq 2^r\cdot\max_{0\leq t\leq\mu_m}\left\|(T-T_m)T_m^t z\right\|.\end{aligned}$$

Luego

$$\left\|\big(p(T)-p(T_m)\big)z\right\| \leq 2^{\mu_m}\cdot\max_{0\leq t\leq\mu_m}\left\|(T-T_m)T_m^t z\right\|\cdot|p| \tag{9.0.7}$$

($\mathrm{gr}(p)\leq\mu_m$). Es fácil ver que si $z=\sum_{j=0}^{\mu_m} z_j w_j$, entonces $(T-T_m)T_m^t z = z_{\mu_m-t}w_{\mu_m+1}$. Como μ_m+1 cumple (1.15.3) se tiene que

$$\begin{aligned}\|(T-T_m)T_m^t z\| &\leq |z|\cdot 2^{\frac{\mu_m+1-b_m/2}{\sqrt{b}_m}} \\ &\leq a_m M_1(m,a_m)\cdot 2^{\frac{\mu_m+1-b_m/2}{\sqrt{b}_m}}\end{aligned}$$

(pues $|z| = |Q_m^\circ(x)| \leq M_1(m,a_m)\cdot \|Q_m^\circ(x)\| \leq M_1(m,a_m)\cdot a_m$ de la Definición 1.17 y $Q_m^\circ x \in K_{nm}$). Por tanto,

$$\begin{aligned}\big\|\big(p(T_m)-p(T)\big)z\big\| &\leq 2^{\mu_m} a_m M_1(m,a_m) 2^{\frac{\mu_m+1-b_m/2}{\sqrt{b_m}}}|p| \\ &\leq 2^{\mu_m} a_m M_1(m,a_m) 2^{\frac{\mu_m+1-b_m/2}{\sqrt{b_m}}} N_1(m,a_m).\end{aligned}$$

Sustituyendo en (9.0.7),

$$\begin{aligned}\big\|s(T)p(T)z - s(T)p(T_m)z\big\| &\leq n\cdot 2^{\mu_m+n}\cdot a_m\cdot M_1(m,a_m)\cdot N_1(m,a_m)\cdot 2^{\frac{\mu_m+1-b_m/2}{\sqrt{b_m}}} \\ &< \frac{1}{b_m}\end{aligned}$$

si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido. Ahora

$$\big\|q(T)-p(T)s(T)z\big\| = \left\|p(T)s(T)\left(\frac{T^{b_m}}{b_m}-I\right)z\right\|.$$

Si $a_m \leq i \leq \mu_m$ entonces $\left(\frac{T^{b_m}}{b_m}-I\right)w_i = \frac{1}{b_m}e_{i+b_m}$ por (1.15.4). Por tanto,

$$\left\|p(T)s(T)\left(\frac{T^{b_m}}{b_m}-I\right)w_i\right\| \leq \frac{1}{b_m}\big\|p(T)s(T)\big\|.$$

Por otro lado, como $m \geq 3$ y t^{a_m} divide a $p(t)$, y si $0 \leq i \leq a_m$ entonces,

$$p(T)s(T)\left(\frac{T^{b_m}}{b_m}-I\right)w_i = p_0(T)s(T)\left(\frac{T^{b_m}}{b_m}-I\right)w_{i+a_m}$$

donde $p_0(t) = t^{-a_m}p(t)$ y como antes, $a_m \leq i+a_m \leq \mu_m$. Luego

$$\left\|\left(\frac{T^{b_m}}{b_m}-I\right)w_{i+a_m}\right\| = \frac{1}{b_m}.$$

Así,

$$\left\|p(T)s(T)\left(\frac{T^{b_m}}{b_m}-I\right)w_i\right\| \leq \frac{1}{b_m}\big\|p_0(T)s(T)\big\|.$$

Combinando ambos resultados tenemos que, para todo $z \in F_{\mu_m}$,

$$\left\|p(T)s(T)\left(\frac{T^{b_m}}{b_m}-I\right)z\right\| \leq \frac{1}{b_m}\cdot |z|\cdot \max\big\{\|p_0(T)s(T)\|, \|p(T)s(T)\|\big\}.$$

Si $z = Q_m^\circ(x)$, entonces

$$|z| \le M_1(m, a_m) \cdot \|z\| \le a_m \cdot M_1(m, a_m).$$

Luego si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido entonces, $\|T\| \le 2$ y

$$\begin{aligned}\left\| p(T)s(T)\left(\frac{T^{b_m}}{b_m} - I\right)z \right\| &\le \frac{1}{b_m} \cdot a_m \cdot M_1(m, a_m)|p| \cdot |s| \cdot 2^{\mathrm{gr}(p)+\mathrm{gr}(s)} \qquad (|p_0| = |p|)\\ &\le \frac{1}{b_m} \cdot a_m \cdot M_1(m, a_m) \cdot 2^{n+\mu_m} \cdot N_1(m, a_m) \cdot n\\ &\le \frac{1}{\sqrt{b_m}}.\end{aligned}$$

Así,

$$\left\| \big(q(T) - p(T)s(T)\big)z \right\| \le \frac{1}{\sqrt{b_m}}.$$

Consideremos ahora el término $q(T)(\pi_S - \pi_H)x$ de la parte derecha de (9.0.5) donde el vector $(\pi_S - \pi_H)x$ pertenece al span$\{e_i : \mu_m < i \le \nu_m\}$. En el siguiente lema, damos una prueba de cómo se comporta el operador T en tal subespacio.

ASERTO. *Sea $\eta > 0$, si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido entonces para todo $m \in \mathbb{N}$,*

$$\left\| T^{a_m+b_m}\big|_{\mathrm{span}\{e_i : \mu_m < i \le \nu_m\}} \right\| \le 1 + \eta.$$

Demostración. Nótese que $\{e_i : \mu_m < i \le \nu_m\}$ es la base canónica de ℓ^1_N en $(F, \|\cdot\|)$ donde $N = \nu_m - \mu_m$. Por tanto basta probar que

$$\|T^{a_m+b_m} e_i\| < 1 + \eta \qquad (\mu_m < i \le \nu_m).$$

Caso 1. Si para algún r, $1 \le r \le m$, tenemos que $i \in G_4^{(r,m)}$ entonces, por (1.15.4) $e_i = w_i - b_m w_{i-b_m}$.

Caso 1*a*. Si $r < m$, $i \le (m-1)a_m + rb_m$ entonces, (1.15.4) da que $e_{i+a_m+b_m} = w_{i+a_m+b_m} - b_m w_{i+a_m}$. Por tanto,

$$T^{a_n+b_n}(e_i) = e_{i+a_m+b_m}, \qquad \|T^{a_n+b_n}(e_i)\| = 1.$$

Caso 1*b*. Si $r < m$, $i > (m-1)a_m + rb_m$ entonces, escribiendo $j = ma_m + (r+1)b_m$ tenemos que

$$e_j = w_j - b_m w_{j-b_m}. \qquad \text{(por (1.15.4))}$$

Como $j < i + a_m + b_m \le j + a_m$, para algún $\alpha \in (0, a_m]$ se tiene que

$$T^{a_m+b_m} e_i = T^\alpha e_j,$$

luego
$$\|T^{a_m+b_m}e_i\| \leq 2^{a_m-1}\|Te_j\|.$$
Como en el Caso 3b de la prueba del Lema 4.2 y de la Definición 1.15 tenemos que
$$Te_j = \varepsilon_1 e_{j+1} - b_m\varepsilon_2 \cdot e_{j+1-b_m}$$
para cada j de la forma $ma_m + rb_m$ $(1 \leq r \leq m)$ donde,
$$\varepsilon_2 = 2^{\frac{ma_m+1-b_m/2}{\sqrt{b_m}}}, \qquad \varepsilon_1 = \begin{cases} \varepsilon_2, & r < m, \\ 2^{\frac{\nu_m+1-c_m/2}{\sqrt{c_m}}} & r = m. \end{cases}$$
Por tanto, $\|Te_j\| \leq \dfrac{1}{b_m^2}$ y
$$\begin{aligned} \|T^{a_m+b_m}e_i\| &\leq \frac{2^{a_m-1}}{b_m^2} \\ &< \frac{1}{b_m} \end{aligned}$$
si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido.

Caso 1c. Si $r = m$, entonces $i = \nu_m$ y
$$T^{a_m+b_m}e_i = w_{\nu_m+a_m+b_m} - b_m w_{\nu_m+a_m}.$$
Si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido, entonces $\nu_m + a_m + b_m < c_m$; por (1.15.6) tenemos que
$$\|w_{\nu_m+a_m}\| = 2^{-\frac{c_m/2-\nu_m-a_m}{\sqrt{c_m}}} < \frac{1}{c_m}$$
y
$$\|w_{\nu_m+a_m+b_m}\| = 2^{-\frac{c_m/2-\nu_m-a_m-b_m}{\sqrt{c_m}}} < \frac{1}{c_m}.$$
Por tanto,
$$\|T^{a_m+b_m}e_i\| \leq \frac{1+b_m}{c_m} < \eta.$$

Caso 2. Si para algún r, $1 \leq r \leq m$, se tiene que $i \in (ma_m + (r-1)b_m, r(a_m+b_m))$ entonces, por (1.15.3),
$$e_i = 2^{\frac{h-i}{\sqrt{b_m}}} w_i.$$

Caso 2*a*. Si $r < m$, entonces $i + a_m + b_m \in (ma_m + rb_m, (r+1)(a_m + b_m))$. Luego (1.15.3) da que

$$\begin{aligned} e_{i+a_m+b_m} &= 2^{\frac{h' - i - a_m - b_m}{\sqrt{b_m}}} w_{i+a_m+b_m} \qquad (h' = h + b_m) \\ &= 2^{\frac{h-i-a_m}{\sqrt{b_m}}} w_{i+a_m+b_m}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \|T^{a_m+b_m} e_i\| &= \|2^{a_m/\sqrt{b_m}} e_{i+a_m+b_m}\| \\ &= 2^{a_m/\sqrt{b_m}} \\ &< 1 + \eta \end{aligned}$$

si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido.

Caso 2*b*. Si $r = m$, entonces $i + a_m + b_m \in (\nu_m, \nu_m + a_m + b_m)$. Por tanto, si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido, entonces $\|T\| \leq 2$ y

$$\begin{aligned} \left\|T^{a_m+b_m} e_i\right\| &= 2^{(h-i)/\sqrt{b_m}} \left\|w_{i+a_m+b_m}\right\| \\ &= 2^{(h-i)/\sqrt{b_m}} \left\|T^{\alpha} w_{\nu_m+1}\right\| \qquad (\alpha \in [0, a_m + b_m)) \\ &\leq 2^{\frac{h-i}{\sqrt{b_m}} + a_m + b_m} \left\|w_{\nu_m+1}\right\|. \end{aligned}$$

De (1.15.6) sabemos que $\|w_{\nu_m+1}\| = 2^{\frac{\nu_m + 1 - c_m/2}{\sqrt{c_m}}} < 1/c_m^2 < \eta$ si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido. Por tanto,

$$\left\|T^{a_m+b_m} e_i\right\| < 2^{\frac{h-i}{\sqrt{b_m}} + a_m + b_m} \cdot \frac{1}{c_m^2} < \frac{1}{c_m}$$

si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido. Como estos son todos los casos posibles, el Aserto queda probado. $\square$

Aplicando el Aserto anterior a (9.0.5) se tiene que

$$\begin{aligned}
&\|q(T)(\pi_S-\pi_H)x\| \\
&\quad= \left\|\frac{T^{b_m}}{b_m}p(T)s(T)(\pi_S-\pi_H)x\right\| \\
&\quad= \left\|\frac{T^{a_m+b_m}}{b_m}p_0(T)s(T)(\pi_S-\pi_H)x\right\| \\
&\quad\le \frac{1}{b_m}\cdot\big\|s(T)\big\|\cdot\big\|p_0(T)\big\|\cdot 2\cdot\big\|(\pi_S-\pi_H)x\big\| && \big(\text{por el Aserto y puesto que} \\
&&& (\pi_S-\pi_H)x\in\operatorname{span}\{e_i : i\in(\mu_m,\nu_m]\}\big); \\
&\quad\le \frac{2}{b_m}\big\|s(T)\big\|\cdot\big\|p_0(T)\big\| && \big(\text{ya que } \|x\|=1 \text{ y } \|\pi_S-\pi_H\|=1\big) \\
&\quad\le \frac{2^{1+\operatorname{gr}(s)+\operatorname{gr}(p_0)}}{b_m}|s|\cdot|p_0| && \big(\|T\|\le 2\big) \\
&\quad\le \frac{2^{1+n+\mu_m}\cdot n\cdot N_1(m,a_m)}{b_m} \\
&\quad\le \frac{1}{\sqrt{b_m}} && (9.0.8)
\end{aligned}$$

si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido. Como $\|T\|\le 2$, entonces

$$\begin{aligned}
&\big\|(\bar p_{k,\nu_m}-q)(T)(z+(\pi_S-\pi_H)x)\big\| \\
&\qquad\le |\bar p_{k,\nu_m}-q|\cdot 2^{\operatorname{gr}(\bar p_{k,\nu_m}-q)}\cdot\big\|z+(\pi_S-\pi_H)x\big\| \\
&\qquad\le 4^{-\nu_m}\cdot 2^{\nu_m}\cdot(a_m+1) && \big(\text{por } (9.0.2),(9.0.3),(9.0.4),(3.2) \\
&&& \text{y ser } \pi_S-\pi_H \text{ una proyección}\big) \\
&\qquad\le \frac{1}{b_m} && (9.0.9)
\end{aligned}$$

si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido. Por otro lado, para cada i, $0\le i\le\nu_m$, (1.15.5) da que

$$\big(T^{c_m^k}-\bar p_{k,\nu_m}(T)\big)w_i=\frac{1}{c_m}e_{i+c_m^k}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\big\|\big(T^{c_m^k}-\bar p_{k,\nu_m}(T)\big)(z+(\pi_S-\pi_H)x)\big\| &\le \frac{1}{c_m}|z+(\pi_S-\pi_H)x| \\
&\le \frac{1}{c_m}M_2(m,b_m)\|z+(\pi_S-\pi_H)x\| \\
&\le \frac{1}{c_m}M_2(m,b_m)(a_m+1) \\
&\le \frac{1}{b_m} && (9.0.10)
\end{aligned}$$

si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido (puesto que $z \in K_{nm}$, $\pi_S - \pi_H$ es proyección y $(z + (\pi_S - \pi_H)x) \in F_{\nu_m}$). Ahora, por el Lema 8,

$$\left\|T^{c_m^k} \circ \pi_H\right\| < 6,$$

donde $H = \{e_i : i \in (\nu_n, \xi_n]\} \subseteq \Delta_m$ para todo $n \geq m$. Elegimos $H = \{e_i : i \in (\nu_m, \xi_m]\}$, y así

$$\pi_H = \pi_H \circ \pi_{\Delta_m}.$$

Por tanto, $T^{c_m^k} \pi_H = T^{c_m^k} \pi_H \circ \pi_{\Delta_m}$ y

$$\|T^{c_m^k} \pi_H(x)\| \leq 6 \cdot \|\pi_{\Delta_m}(x)\|. \tag{9.0.11}$$

Por último, estimamos $\|T^{c_m^k}(I - R_m^\circ)x\|$. Como $R_m^\circ e_i = e_i$ si $0 \leq i \leq \mu_m$, entonces

$$T^{c_m^k}(I - R_m^\circ)x = T^{c_m^k}(I - R_m^\circ)\pi_{\Delta_m} x.$$

Luego por el Lema 5, si $\boldsymbol{d}$ crece suficientemente rápido,

$$\left\|T^{c_m^k}(I - R_m^\circ)x\right\| \leq 2\left\|\pi_{\Delta_m} x\right\|.$$

Así que

$$\left\|T^{c_m^k}(I - R_m^\circ)x\right\| \leq 2\left\|\pi_{\Delta_m} x\right\|.$$

Sustituyendo finalmente en (9.0.5) las cotas obtenidas,

$$\begin{aligned}
\left\|T^{c_m^k} - s(T)w_0\right\| &\leq 2\left\|\pi_{\Delta_m} x\right\| + 6\left\|\pi_{\Delta_m} x\right\| + \frac{1}{b_m} + \frac{1}{b_m} + \frac{1}{\sqrt{b_m}} + \frac{1}{\sqrt{b_m}} + \frac{1}{b_m} + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}} \\
&= 8\left\|\pi_{\Delta_m} x\right\| + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}} + \frac{3}{b_m} + \frac{2}{\sqrt{b_m}} \\
&\leq 8\left\|\pi_{\Delta_m} x\right\| + \frac{2}{\sqrt{a_{n-1}}} \qquad (m > n \geq 2).
\end{aligned}$$

Esto completa la prueba del Lema 9. $\square$

10. Prueba del resultado principal

Recordamos que para un operador lineal acotado T definido sobre un espacio de Banach separable infinito dimensional B, se define la órbita de $x \in B$ por el operador T como el conjunto de imágenes de x por las sucesivas iteraciones de T:

$$\mathrm{Orb}(T,\ x) = \{x,\ Tx,\ T^2x, \dots\}.$$

Un vector $x \in B$ se dice *hipercíclico* para T si $\mathrm{Orb}(T,\ x)$ es densa en B. Un operador es *hipercíclico* si éste posee un vector *hipercíclico.*

TEOREMA 10. *Todo vector no nulo es hipercíclico para el operador* $T : \big(\ell^1, \|\cdot\|\big) \longrightarrow \big(\ell^1, \|\cdot\|\big)$.

Demostración. Sean $x, y \in \ell^1$ con $x \neq 0$, y sea $\epsilon > 0$. Encontraremos un $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T^M x - y\| < \epsilon.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\|x\| = 1$. Obviamente $w_0 = e_0$ es cíclico para T, así que existe un polinomio s tal que

$$\big\|s(T)w_0 - y\big\| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{10.1}$$

Sea $N \in \mathbb{N}$ de modo que $\mathrm{gr}(s) \leq N$, $|s| \leq N$ y $\dfrac{2}{\sqrt{a_N}} < \dfrac{\epsilon}{3}$. Tomamos $\eta = \epsilon/24$. Por el Lema 6.3, existen $m, n \in \mathbb{N}$ con $m > n > N$ tales que

$$Q_m^\circ(x) \in K_{nm}$$

y

$$\big\|\pi_{\Delta_m}(x)\big\| < \eta$$

para todo $x \in \ell^1$. Por el Lema 9 existe k, $1 \leq k \leq M(\nu_m)$, tal que

$$\begin{aligned}
\big\|T^{c_m^k} x - s(T)w_0\big\| &\leq 8\big\|\pi_{\Delta_m}(x)\big\| + \frac{2}{\sqrt{a}_{n-1}} \\
&\leq 8\eta + \frac{2}{\sqrt{a}_{n-1}} \\
&\leq \frac{8 \cdot \epsilon}{24} + \frac{2}{\sqrt{a}_N} \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\
&= \frac{2 \cdot \epsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\left\|T^{c_m^k}x - y\right\| &\le \left\|T^{c_m^k}x - s(T)w_0\right\| + \left\|s(T)w_0 - y\right\| \\ &< \frac{2\cdot\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon.\end{aligned}$$

Luego x es hipercíclico para T y se cumple que

$$\overline{\left\{T^{c_m^k}x\right\}} = \ell^1 \quad \text{para todo} \quad x \in \ell^1 \setminus \{0\}. \qquad \square$$

Para terminar, damos un resultado sencillo que se deduce de los cálculos realizados en la Sección 9:

LEMA. *El espectro de T es igual a su espectro puntual aproximado, que es la bola unidad de $\mathbb{C}$.*

Demostración. Por un lado, si fijamos un $l > 0$ y para $n > l$ consideramos la sucesión de vectores $(g_i)_{i=0}^{l} = (e_{na_n+b_n-i})_{i=0}^{l}$, entonces T actúa sobre estos vectores de la siguiente forma (ver caso (4.2.4) del Lema 4.2):

$$T : g_l \to g_{l-1} \to g_{l-2} \to \ldots \to g_0 \to \varepsilon(n),$$

donde $\lim_{n\to\infty} \|\varepsilon(n)\| \to 0$ (ver caso (4.2.10) del Lema 4.2). Así que el operador desplazamiento a la izquierda unilateral

$$Se_i = \begin{cases} e_{i-1} & \text{si } i \ge 1, \\ 0 & \text{si } i = 0; \end{cases}$$

está 'finitamente representado' en T, y por tanto el espectro puntual aproximado de T contiene al espectro de S, que es la bola unidad de $\mathbb{C}$. Por otro lado, usando las mismas notaciones del Lema 9, y si tomamos m suficientemente grande de modo que $\|\Delta_m(x)\| \le 1/(6b_m)$, entonces por (9.0.5), el Aserto dado en la prueba del mismo lema, (9.0.8), (9.0.9), (9.0.10) y (9.0.11), se tiene que

$$\begin{aligned}\left\|\Big(T^{c_m^k} - q(T)(\pi_S - \pi_H)\Big)\,x\right\| &= \Big\|T^{c_m^k}\pi_H x + \big(T^{c_m^k} - \bar{p}_{k,\nu_m}(T)\big)(Q_m^\circ + \pi_S - \pi_H)x \\ &\quad + \big(\bar{p}_{k,\nu_m}(T) - q(T)\big)(Q_m^\circ + \pi_S - \pi_H)x \\ &\quad + q(T)(\pi_S - \pi_H)x\Big\| \\ &\le \frac{1}{b_m} + \frac{1}{b_m} + \frac{1}{b_m} + \frac{1}{\sqrt{b_m}} \\ &< \frac{4}{b_m}.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\left\|T^{c_m^k}\right\| &\leq \left\|T^{c_m^k} - q(T)(\pi_S - \pi_H)\right\| + \left\|q(T)(\pi_S - \pi_H)\right\| \\ &\leq \frac{4}{b_m} + 2^{a_m + b_m} \\ &\leq b_m 2^{b_m}, \qquad\qquad \text{(si } \boldsymbol{d} \text{ crece suficientemente rápido)}\end{aligned}$$

y que implica claramente que el radio espectral es menor o igual que uno. Así que el espectro de T debe ser precisamente la bola unidad de $\mathbb{C}$. $\square$

REFERENCIAS

[An] S. I. Ansari, *Existence of hypercyclic operators on all Banach spaces*, J. Funct. Anal. **148** (1997), 384-390.

[AS] N. S. Aronszajn y K. T. Smith, *Invariant subspaces of completely continuous operators*, Ann. of Math. **60** (1954), 345-350.

[At] A. Atzmon, *An operator without invariant subspaces on a Nuclear Fréchet space*, Ann. of Math. **117** (1983), 669-694.

[Be1] B. Beauzamy, *Un opératour sur l'espace de Hilbert, dont tous les polynômes sont hypercycliques*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser **303** (1986), 923-927.

[Be2] B. Beauzamy, *An operator on a separable Hilbert space, with many hypercyclic vectors*, Studia Math. **87** (1988), 71-78.

[Be3] B. Beauzamy, *An operator on a separable Hilbert space, with all polynomials hypercyclic*, Studia Math. **96** (1990), 81-90.

[Be4] B. Beauzamy, *Un opérateur sans sous-espace invariant: simplification de l'example de P. Enflo*, Integral Equations and Operator Theory **8** (1985), 314-384.

[Be5] B. Beauzamy, *Introduction to operator theory and invariant subspaces*, North-Holand (1988), Amsterdam - New York - Oxford - Tokyo.

[Bi] G. D. Birkhoff, *Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières*, C. R. Acad. Sci. Paris **189** (1929), 473-475.

[Bo] P.S. Bourdon, *Invariant manifolds of hypercyclic vectors*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 845-847.

[BF] P. S. Bourdon y N. Feldman, *Somewhere dense orbits are everywhere dense*; Preprint.

[BS1] P. S. Bourdon y J. H. Shapiro, *Cyclic composition operators on H^2*, Proc. Sympos. Pure Math. **51/2**; Amer. Math. Soc., Providence, RI (1990), 43-53.

[BS2] P. S. Bourdon y J. H. Shapiro, *Cyclic phenomena for composition operators*, Mem. Amer. Math. Soc. **125** (1997).

[CS] K. C. Chan y J. H. Shapiro, *The cyclic behavior of translationh operators on Hilbert spaces of entire functions*, Indiana Univ. Math. J. **40** (1991), 1421-1449.

[En1] P. Enflo, *On the invariant subspace problem for Banach spaces*, Séminaire Maurey-Schwartz (1975–1976), Espaces L^p, applications radonifiantes et géométrie des espaces de Banach; Exp. No. 14–15, Centre Math., Ecole Polytech., Palaiseau (1976).

[En2] P. Enflo, *On the invariant subspace problem for Banach spaces*, Acta Math. **158** (1987), 212-313.

[Fe] N. Feldman, *Perturbations of hypercyclic vectors and lattice-like orbits*; Preprint.

[GS] R. M. Gethner y J. H. Shapiro, *Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 281-288.

[GS] G. Godefroy y J. H. Shapiro, *Operators with dense invariant cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal. **98** (1991), 229-269.

[He] D. A. Herrero, *Limits of hypercyclic and supercyclic operators*, J. Funct. Anal. **99** (1991), 179-190.

[HW] D. A. Herrero y Z. Wang, *Compact perturbations of hypercyclic and supercyclic operators*, Indiana Univ. Math. J. **39** (1990), 819-830.

[HiW] H. M. Hilden y L. J. Wallen, *Some cyclic and non-cyclic vectors of certain operators*, Indiana Univ. Math. J. **23** (1974), 557-565.

[Ki] C. Kitai, *Invariant closed sets for linear operators*, Tesis; Univ. Toronto (1982).

[Lo] V. I. Lomonosov, *Invariant subspaces of the family of operators that commute with a completely continuous operators*, Funckcional Anal. i Priložen. **7 (3)** (1973), 55-56.

[Mc] G. R. MacLane, *Sequences of derivatives and normal families*, J. Analyse Math. **2** (1952), 72-87.

[Mo] A. Montes-Rodríguez, *Banach spaces of hypercyclic vectors*, Michigan Math. J. **43 (3)** (1996), 419-436.
[RR] H. Radjavi y P. Rosenthal, *Invariant subspaces*, Springer-Verlag (1973), Berlin - Heidelberg - New York.
[Re1] C. J. Read, *A solution on the invariant subspace problem*, Bull. London Math. Soc. **16** (1984), 337-401.
[Re2] C. J. Read, *A solution on the invariant subspace problem on the space* ℓ^1, Bull. London Math. Soc. **17** (1985), 305-317.
[Re3] C. J. Read, *A short proof concerning invariant subspace problem* ℓ^1, J. London Math. Soc. **(2) 33** (1986), 335-348.
[Re4] C. J. Read, *The invariant subspace problem for a class of Banach spaces, 2: Hypercyclic operators*, Israel J. Math. **63** (1988), 1-40.
[Ro] S. Rolewicz, *On orbits of elements*, Studia Math. **32** (1969), 17-22.
[Sa1] H. N. Salas, *A hypercyclic operator whose adjoint is also hypercyclic*, Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 765-770.
[Sa2] H. N. Salas, *Hypercyclic weighted shifts*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 993-1004.
[SW] W. Seidel y J. L. Walsh, *On approximation by Euclidean and non-Euclidean translations of an analytic function*, Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941), 916-920.
[Sh] J. H. Shapiro, *Composition operators and classical function theory*, Springer (1993), New York.